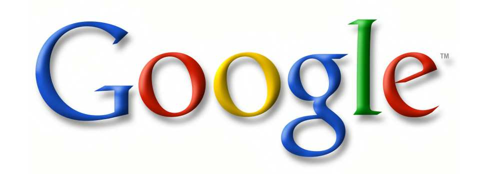
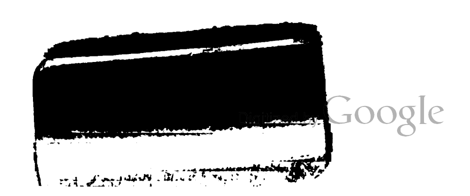





SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
LVX
FIAT
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS



1 – 73
83 – 143 . [illegible]
155 – /.

Ausführliches Lehrbuch
der
ebenen und sphärischen
Trigonometrie.

Zum
Selbstunterricht
mit Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens
bearbeitet
von

H. B. Lübsen.

Mit 58 Figuren im Text.

Zwölfte verbesserte Auflage.



Leipzig.
Friedrich Brandstetter.
1876.

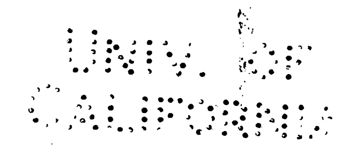
Vorrede.

Dem Zwecke aller mathematischen Lehrbücher des Verfassers gemäss hat auch das der Trigonometrie einige durchgreifende Eigenthümlichkeiten. Damit sich die Schwierigkeiten nicht häufen, sondern zu ihrer Bewältigung vielmehr erst Kräfte und Hülfsmittel geschaffen werden, und vielseitiges und intensives Interesse sie weniger empfinden lasse, ist die Goniometrie nicht an die Spitze gestellt, sondern wird erst da behandelt, wo das Interesse sich ihr in vollem Masse zuwenden kann und hinlängliche Uebung der Kräfte vorausgegangen ist. Ueberhaupt sucht sich Darstellung und Anordnung dem Bedürfnisse der Lernenden auf's Innigste anzuschmiegen. Daher werden die Begriffe nicht nur klar und deutlich gemacht und einfach und übersichtlich mit einander verbunden, sondern auch so gefasst, wie sie sich ursprünglich darbieten. Jede voreilige Erweiterung und Verallgemeinerung wird sorgfältig vermieden. Erst, wo die Begriffe über sich selbst hinausweisen und eine Verallgemeinerung fordern, tritt eine solche ein. Darum werden die trigonometrischen Functionen, nicht als Linien, sondern als

Zahlen erklärt, ist Anfangs nur von den Functionen spitzer Winkel die Rede, geht die Auflösung der Dreiecke vom rechtwinkeligen durch das gleichschenkelige hindurch zu dem allgemeinen allmälig fort, werden zuerst nur Sinus und Cosinus und dann auch Tangente und Cotangente zur Auflösung herbeigezogen und dehnt sich der Begriff der trigonometrischen Functionen in diesem Gange auf stumpfe Winkel aus, um endlich in der Goniometrie selbst Abschluss und Vollendung zu finden.

Hamburg.

H. B. Lübsen.



Erster Theil.

Ebene Trigonometrie.

Einleitung.

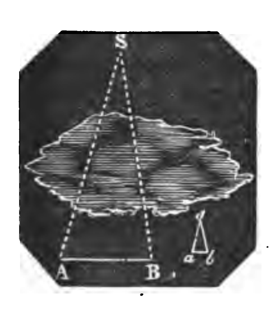
Die Elementar-Geometrie lehrt schon, dass unter allen räumlichen Grössen das einfache Dreieck insofern sich am wichtigsten zeigt, als es gleichsam ein Schlüssel ist, durch dessen Vermittelung wir zur Kenntniss der meisten übrigen Figuren gelangen. Kreis und Dreieck sind höchst verschiedene Gestalten, aber nur durch Hülfe des Dreiecks konnten wir die vielen merkwürdigen Eigenschaften des Kreises entdecken, seinen Umfang und seinen Inhalt finden. Dasselbe gilt von vielen andern räumlichen Grössen, Kegel, Kugel etc. Nicht allein die reine Geometrie kommt auf das einfache Dreieck zurück, sondern fast auch die ganze practische Geometrie, mithin ganze, für das bürgerliche Leben wichtige und unentbehrliche Wissenschaften. Geodäsie (Geographie, Land- und Seekarten), Schifffahrtskunde, Astronomie, Mechanik, Optik, etc. konnten erst in neuerer Zeit durch eine vervollkommnete Theorie des Dreiecks (Trigonometrie) fest begründet, practisch sicher und fruchtbar gemacht werden. Aus diesen Gründen ist die vollständige Theorie des Dreiecks (Trigonometrie) von so grosser Wichtigkeit für die Wissenschaft selbst und für das practische Leben, und man kann behaupten, einer der wichtigsten Theile der gesammten Mathematik, und deshalb ein gründliches Studium derselben die darauf verwandte Zeit und Mühe reichlich lohnend.

Aus der Elementar-Geometrie wissen wir, durch welche von den sechs Bestandtheilen eines Dreiecks (drei Seiten und drei Winkel) die übrigen bestimmt sind, mithin das ganze Dreieck vollkommen bestimmt ist, nämlich durch:

1. Zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel.
2. Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel.
3. Alle drei Seiten.
4. Zwei Seiten und einen der grössern Seite gegenüber liegenden Winkel.

Auch lehrt die Geometrie das Verfahren, wenn irgend drei dieser Bestimmungsstücke der Grösse nach gegeben sind, die dadurch bestimmte Grösse der übrigen drei Stücke durch Construirung des ganzen Dreiecks zu finden.

In rein theoretischer Hinsicht lässt sich gegen die Richtigkeit dieses zeichnenden Verfahrens auch nichts einwenden, in practischer Hinsicht aber, wo möglichste Genauigkeit gefordert wird, ist dieses Verfahren, wegen Unzulänglichkeit unserer Sinne und Unvollkommenheit der beim Construiren gebrauchten Werkzeuge, höchst selten zuverlässig und genügend, oft auch ganz unausführbar.



Um dieses einleuchtend zu machen, bedarf es nur eines Beispiels aus der Geodäsie.

Angenommen: es solle die Entfernung eines Punctes, S, von einem Puncte, A, bestimmt werden. Ist die Entfernung wegen eines zwischenliegenden Hindernisses nicht unmittelbar zu messen, so muss es durch Hülfe eines erst zu bildenden Dreiecks geschehen.

Es werde deshalb eine beliebig grosse sogenannte Standlinie, AB, unmittelbar und möglichst genau gemessen, ebenso die beiden Winkel A und B an derselben, mittelst eines bis auf die Secunde genau messenden Winkelmessers,

z. B. AB = 800 Fuss, $\hat{A} = 78^0\,14'\,36''$; $\hat{B} = 85^0\,20'\,17''$.

Wollte man nun aus diesen in Zahlen gegebenen Grössen die fragliche Länge der Linie AS durch Zeichnung finden, so müsste man erst ein ähnliches Dreieck construiren, und also nach

einem verjüngten Massstabe eine Linie, $ab = 800'$, auf einem Zeichnenbrette abstecken und hieran die Winkel $a = A$, $b = B$ zeichnen. So gross dann die Linie as, nach demselben verjüngten Massstabe gemessen, ist, so gross müsste AS in der Wirklichkeit sein, wenn das mit ABS ähnliche Dreieck abs vollkommen genau gezeichnet wäre. Diese Genauigkeit ist aber durch Zeichnung schon deshalb nicht möglich, weil sich die, bis auf die Secunde genau gemessenen Winkel nicht so genau wieder zeichnen lassen. Ein paar Minuten grösser oder kleiner könnte aber, namentlich wenn die Summe der beiden Winkel A, B nahe an 180° käme, einen Fehler verursachen, wodurch die Länge von as, also auch AS um mehr als die Hälfte zu gross oder zu klein ausfiele, abgesehen von der grossen Umständlichkeit dieses zeichnenden Verfahrens, und dass ausserdem der Durchschnittspunct s eine so grosse Entfernung von a und b haben könnte, dass die Linien as, bs fast parallel liefen, auf dem Zeichnenbrette, und wenn es auch die Grösse einer Provinz hätte, gar nicht zum Durchschnitt kämen, und deshalb gar keine Zeichnung möglich wäre. Eben so ungenaue Resultate würde das Constructionsverfahren geben, wenn man darnach aus den drei in Zahlen gegebenen Seiten eines Dreiecks die Grössen der dadurch bestimmten Winkel in Zahlen genau finden wollte.

Diese Beispiele, deren wir nicht nur aus der Geodäsie, sondern auch aus andern Theilen der angewandten Mathematik noch viele anführen könnten, wo man nämlich aus den in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreiecks die dadurch bestimmten mit möglichster Genauigkeit finden soll, zeigen deutlich, dass dies, aus angeführten Gründen, durch geometrische Constructionen durchaus unmöglich ist, und dass wir in allen solchen Fällen auf genaue und sichere Praxis entweder ganz verzichten, oder noch ein anderes, von unsern Sinnen und Werkzeugen unabhängiges Verfahren erfinden, kurzum, die Theorie des Dreiecks erst noch vervollkommnen müssen, und es fragt sich nun, ob und wie sich dieser wichtige Gedanke, den, wie wir eben angedeutet, nicht müssige Speculationen, sondern vielfache, rein practische Bedürfnisse hervorgerufen haben, verwirklichen lasse?

Der Einfall: Hülfe in der Arithmetik zu suchen, stellt sich hier von selbst ein. Denn, könnten wir allgemeine arithmetische Regeln finden, nach welchen man aus den in Zahlen gegebenen

1*

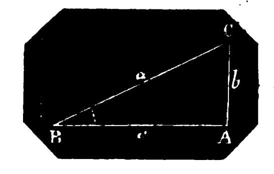
Stücken eines Dreiecks die dadurch bestimmten Stücke berechnen könnte, so wäre damit jener Gedanke offenbar verwirklicht, weil alle durch Rechnung erhaltenen Resultate reines Product des Geistes, mithin von der Unzulänglichkeit unserer Sinne ganz unabhängig, also vollkommen genau und zuverlässig sind, wie es die Arithmetik selbst ist.

Dass solche allgemeine arithmetische Regeln existiren müssen, lässt sich wenigstens muthmassen. Auch sind diese Regeln, obwohl die Wissenschaft, zu ihrem eigenen und zum grossen Nachtheil der Praxis, wegen vernachlässigter Ausbildung der den Alten fast gänzlich unbekannten arithmetischen Wissenschaften, sehr lange darauf warten musste, in den letzten anderthalb hundert Jahren gefunden, und machen zusammen nun denjenigen Theil der Mathematik aus, welchem man den Titel Trigonometrie (Dreiecksrechnung) giebt.

Der Zweck und Begriff dieser jetzt zu bildenden Wissenschaft ist vorläufig nun wohl so deutlich ausgesprochen, dass der Anfänger, dadurch vorbereitet und angeregt, auf den Gang der Erfindung und Entwickelung gespannt sein wird.

Denn so leicht ist die Sache nicht. Und wer den unaufhaltsamen Fortschritt in den Wissenschaften mit Aufmerksamkeit betrachtet und wahrnimmt, auf welche sinnreiche Weise der menschliche Geist scheinbar unüberwindliche Schwierigkeiten zu beseitigen weiss, der wird auch hier das Verdienst Desjenigen anerkennen und dessen Scharfsinn bewundern, der als der erste Erfinder der Trigonometrie betrachtet werden muss. Auf welche sinnreiche Weise er zu Werke ging, wollen wir jetzt zeigen.

Durch die Ueberlegung, dass jedes Dreieck durch ein Perpendikel immer in zwei rechtwinklige zerlegt werden kann, und deshalb die ganze Trigonometrie auf die des einfachern rechtwinkligen Dreiecks zurückkommt, war die allgemeine Aufgabe vorläufig auf die weit einfachere gebracht: aus beliebigen in Zahlen gegebenen Bestimmungsstücken eines rechtwinkligen Dreiecks die übrigen Stücke desselben durch Rechnung zu finden; und es war ein sehr glücklicher, gleich auf die beste und bequemste Methode führender Gedanke, durch Herbeischaffung folgender Hülfsgrössen diese Aufgabe leicht zu lösen.

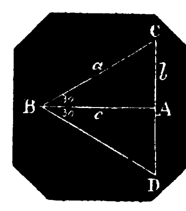


Man denke sich, sagte der erste Erfinder, auf dem einen Schenkel eines bestimmten Winkels, B, ein beliebiges Stück, BC, abgeschnitten und von dem Endpunct C ein Loth (Perpendikel), CA, auf den andern Schenkel gefällt, so entsteht ein bei A rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten a, b, c heissen mögen. Denken wir uns die Längen dieser Seiten nach einer beliebigen Längeneinheit gemessen und durch Zahlen ausgedrückt, so ist klar, dass die Verhältnisse von je zwei dieser Seiten oder die unbenannten Quotienten, die je zwei Seiten durch einander dividirt geben $\left(\text{wie } \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{b}\right)$*), durch die Grösse des Winkels B vollkommen bestimmt sind.

Wäre z. B. $\widehat{B} = 30^0$, so wäre:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2};\quad \frac{c}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3};\quad \frac{b}{c} = \frac{1}{3}\sqrt{3};\quad \frac{c}{b} = \sqrt{3}.$$

Denn denkt man den Winkel $B = 30^0$ auch unterhalb BA angetragen und CA bis D verlängert, so ist BCD ein gleichseitiges Dreieck (weil jeder Winkel $= 60^0$), folglich $b = \frac{1}{2}a$; $c = \sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}a)^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, mithin $\frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}$; $\frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\frac{b}{c} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{c}{b} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3}$.



Ferner ist auch klar, dass diese vier Quotienten nur von der Grösse des Winkels B, nicht aber von der absoluten Grösse der Seiten a, b, c abhängen; denn wird eine dieser Seiten, z. B. $BC = a$, 2, 3 $\cdots n$ mal so gross genommen, so werden (vermöge Aehnlichkeit der Dreiecke) auch die beiden andern Seiten b und c in demselben Verhältnisse grösser, und die Quotienten bleiben deshalb für denselben Winkel noch dieselben. Mit dem Winkel aber ändern sich auch die Quotienten.

Wäre z. B. $\widehat{B} = 45^0$, so wären die erwähnten Quotienten:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\tfrac{1}{2}};\quad \frac{c}{a} = \sqrt{\tfrac{1}{2}};\quad \frac{b}{c} = 1,\quad \frac{c}{b} = 1.$$

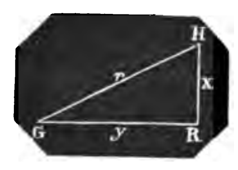
*) Die beiden Quotienten $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$ sind überflüssig.

Denn wenn in dem bei A rechtwinkligen Dreieck CAB der Winkel $B = 45^0$ ist, so ist auch $\widehat{C} = 45^0$, und die beiden Lothe b und c sind einander gleich. Setzen wir die Länge dieser gleichen Catheten $= x$, so ist: $x^2 + x^2 = a^2$ oder $x^2 = \frac{1}{2}a^2$, mithin $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$; folglich, wie oben, $\frac{b}{a} = \frac{a\sqrt{\frac{1}{2}}}{a} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{\frac{1}{2}}}{a} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\frac{b}{c} = \frac{a\sqrt{\frac{1}{2}}}{a\sqrt{\frac{1}{2}}} = 1$ etc.

Könnte man nun diese vier Quotienten, wie hier für 30^0 und 45^0, auch für jeden andern Zustand des Winkels B, von 0^0 bis 90^0 berechnen, und dann alle nebst den zugehörigen Winkeln in einer Tabelle leicht übersichtlich zusammenstellen, etwa so:

Winkel	Quotienten			
	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{c}{b}$
$0^0\,0'\,0''$	...	...	...	...
.				
.				
.				
$30^0\,0'\,0''$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$45^0\,0'\,0''$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	1
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

so leuchtet der grosse practische Nutzen einer solchen Tabelle leicht ein, und wir wollen zeigen, dass durch Anfertigung derselben die Aufgabe der Trigonometrie schon so gut wie gelöst wäre. Denn wären dann von einem rechtwinkligen Dreieck (und darauf kommt, wie gesagt, Alles zurück) zwei Bestimmungsstücke gegeben, so könnte man mittelst einer solchen vollständigen trigonometrischen Tafel die übrigen Stücke durch eine einfache Multiplication oder Division sehr leicht berechnen.



Wären z. B. in dem bei R rechtwinkligen Dreieck GHR der Winkel $G = 30^0$, die Hypotenuse $GH = r = 2530$ Fuss gegeben, und das dem Winkel G gegenüber liegende Loth $HR = x$, so wie auch das ihm anliegende $GR = y$ zu bestimmen verlangt, so giebt offenbar x durch r dividirt denselben Quotienten, welcher in der ersten Spalte der Tafel neben dem Winkel von 30^0 steht; daher $\frac{x}{2530} = \frac{1}{2}$, und hieraus durch eine leichte Multiplication

$x=1265$ Fuss. Ebenso ist der Quotient $\frac{y}{2530}$ für den Winkel $G=30^0$ vollkommen bestimmt. Sucht man diesen Quotienten neben dem Winkel von 30^0 in der zweiten Spalte, so ist $\frac{y}{2530}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, also $y=2530\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. Einen gleichen Nutzen gewähren offenbar die beiden andern Spalten, wenn von einem rechtwinkligen Dreieck eine Cathete und ein spitzer Winkel gegeben sind; auch merkt man wohl schon, wie die Tafel (als vollständig vorausgesetzt) dienen kann, um in einem rechtwinkligen Dreieck die beiden spitzen Winkel zu bestimmen, wenn irgend zwei Seiten desselben gegeben sind.

Der grosse Nutzen einer solchen vollständigen Tafel ist aus dem Gesagten nun wohl einleuchtend, und der Erste, der den Gedanken an eine solche Tabelle fasste, muss als der eigentliche Erfinder der Trigonometrie betrachtet werden, denn alles Folgende, die ganze Trigonometrie, ist nur Bearbeitung und Ausführung dieses Gedankens, woran nun Viele Theil nehmen und ihren Scharfsinn zeigen konnten, und den die Zeit bald zur Reife bringen musste; denn eins folgt aus dem andern fast von selbst. Hier gilt wieder, was Descartes von den Fortschritten der Mathematik überhaupt sagt: „wenn man nur die zwei oder drei ersten Glieder erst hat, so ist es nicht schwer, auch die übrigen zu finden.“

Erstes Buch.

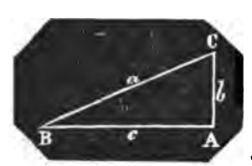
Benennung der trigonometrischen Functionen. Berechnung derselben. Grenzen, zwischen welchen sie enthalten. Einrichtung der trigonometrischen Tafeln.

Benennung der trigonometrischen Functionen.

1.

Die in der Einleitung erwähnten vier Quotienten: $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{b}$, welche in einem rechtwinkligen Dreieck, ABC, in Bezug auf einen der beiden spitzen Winkel, B, je zwei Seiten durch einander dividirt, geben, sind, wie wir gesehen haben, durch die Grösse des Winkels B vollkommen bestimmt, und also Functionen dieses Winkels (Algebra § 148). Man benennt sie deshalb auch, wegen ihrer Wichtigkeit für die Trigonometrie, mit dem gemeinschaftlichen Namen: trigonometrische Functionen. Da nun aber von diesen vier trigonometrischen Functionen bald die eine, bald die andere gebraucht wird, so ist es um Verwechselungen und Weitläufigkeiten im Vortrage zu vermeiden, offenbar nothwendig, jede mit einem eigenen Namen zu benennen. Diese Namen sind, wie alle Eigennamen, ursprünglich ganz willkürlich, und der Anfänger muss deshalb in den folgenden etwas seltsam klingenden Namen keinen verborgenen Sinn suchen wollen.

2.



Man nennt nämlich in **jedem** recht-winkligen Dreieck, ABC, in Bezug auf einen der beiden spitzen Winkel, z. B. $\widehat{B}$:

1. *sinus* des Winkels B (sprich kurz: *sinus* B): das ihm gegenüber liegende Loth durch die Hypotenuse dividirt. In Zeichen: $\sin B = \frac{b}{a}$.

2. *cosinus* des Winkels B: das ihm anliegende Loth durch die Hypotenuse dividirt. In Zeichen: $\cos B = \frac{c}{a}$.

3. *tangente* des Winkels B: das ihm gegenüber liegende Loth durch das anliegende dividirt. In Zeichen: $tg\, B = \frac{b}{c}$.

4. *cotangente* des Winkels B: das ihm anliegende Loth durch das gegenüber liegende dividirt. In Zeichen: $cot\, B = \frac{c}{b}$

Diese vier Kunstwörter und ihre Bedeutung muss der Anfänger sich wohl merken, so wie auch, dass die trigonometrischen Functionen (*sinus, cosinus, tangente* und *cotangente*) abstracte Zahlen sind, und also das lateinische Wort *tangente* hier eine ganz andere Bedeutung hat, als in der Geometrie, wo es eine berührende Linie bedeutet.

Berechnung der trigonometrischen Functionen.

3.

Mit der ursprünglichen Berechnung der trigonometrischen Functionen verhält es sich, gleichnissweise, wie mit der ursprünglichen Berechnung der Logarithmen. Als man diese sehr mühsame Arbeit unternahm, waren die kurzen und leichten Methoden, welche die seitdem erfundene höhere Mathematik jetzt darbietet, noch nicht bekannt, und wir müssen uns deshalb auch, weil wir die höhere Mathematik hier nicht als bekannt voraussetzen dürfen, damit begnügen, an ein paar Beispielen die Möglichkeit der Berechnung nach dem ältern mühsamen Verfahren zu erklären. Die ersten Berechner der trigonometrischen Tabellen haben der Wissenschaft einen unschätzbaren Dienst geleistet, und wir

können auch hier wieder von ihnen sagen, dass sie über diese sehr mühsame Arbeit ihr Leben verkürzt haben, um das unsere zu verlängern.

Die Möglichkeit, die trigonometrischen Functionen zu berechnen, erkannte der erste Erfinder darin: dass man die Seiten aller regelmässigen Vielecke, welche man construiren kann, auch bloss durch Hülfe des pythagoräischen Lehrsatzes, der sich hier in seiner grössten Wichtigkeit zeigt, zu berechnen im Stande ist.

4.

In der Elementar-Geometrie ist nämlich § 194 gezeigt, dass man aus dem *radius* eines Kreises die Seiten AG, GH, AB... aller regelmässigen Vielecke von 4, 8, 16, 32, 64,. .; 6, 12, 24,....; 5, 10, 20,....; 15, 30, 60,...... Seiten berechnen kann. Da nun die, diesen Seiten am Mittelpunct gegenüber liegenden Winkel beziehlich 90°, 45°, 22° 30'....; 120°, 60°, 30°...; 72°, 36°, 18° ..; 24°, 12°, 6°... sind, und die Hälfte jeder berechneten Vielecksseite, wie z. B. BD, durch den *radius* CB dividirt, nämlich: $\frac{BD}{CB}$, den *sinus* des entsprechenden halben Winkels am Mittelpunct giebt, $\left(\frac{BD}{CB} = \sin BCD\right)$, dann aus dem *radius* CB und der halben Vielecksseite BD auch leicht das darauf gefällte Perpendikel CD, mithin auch der *cosinus*, dann die *tangente* und *cotangente* vom Winkel BCD, nämlich: $\frac{CD}{CB}$, $\frac{BD}{CD}$, $\frac{CD}{BD}$ zu finden sind, so hat man zuerst die trigonometrischen Functionen von folgenden Winkeln:



45°	30°	36°	12°
22° 30'	15°	18°	6°
11° 15'	7° 30'	9°	3°
5° 37' 30"	3° 45'	4° 30'	1° 30'
2° 48' 45"	1° 52' 30"	2° 15'	0° 45'
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Wäre z. B. AB die Seite des regelmässigen Sechsecks, folglich AB = CB, so ist, wenn man der leichtern Rechnung halber,

den *radius* CB = 1 setzt*), BD = $\frac{1}{2}$, B$\hat{C}$A = 60°, B$\hat{C}$D = 30°, daher $\sin BCD = \frac{BD}{CB} = \frac{\frac{1}{2}}{1}$, oder $\sin 30° = \frac{1}{2}$. Ferner $CD = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also: $\cos 30° = \frac{CD}{CB} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; dann $tg\, 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ und $\cot 30° = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. Die vier trigonometrischen Functionen des Winkels von 30° sind also:

$$\sin 30° = \frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad tg\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}5773502$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660254 \qquad \cot 30° = \sqrt{3} = 1{,}7320508$$

Ist AG die Seite des regelmässigen Vierecks, so hat man (CA wieder = 1 gesetzt): $AG = \sqrt{2}$, also, weil A$\hat{C}$M = C$\hat{A}$M = 45°; $AM = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $CM = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, daher:

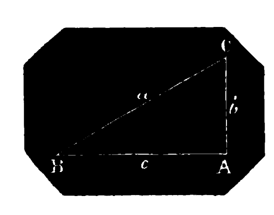
$$\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad tg\, 45° = 1$$

$$\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \cot 45° = 1$$

Eben so könnte man für die übrigen angeführten unzähligen Winkel die entsprechenden trigonometrischen Functionen berechnen. Man sieht aber leicht, dass dennoch eine sehr grosse Lücke bleibt, und namentlich alle Winkel von 45° bis 90° fehlen.

5.

Aus der Erklärung der trigonometrischen Functionen folgt aber, und konnte auch vom ersten Erfinder nicht unbemerkt bleiben, dass in einem rechtwinkligen Dreieck, ABC, irgend eine trigonometrische Function des einen spitzen Winkels, B, zugleich auch die sinnverwandte**) trigonometrische Function des andern spitzen Winkels, C, ist. Der Quotient $\frac{b}{a}$



*) Nähme man den *radius* CB, *r* mal, z. B. 10 mal, grösser, so würden auch die Linien BD, CD eben so viel mal grösser, wobei aber die Quotienten $\frac{BD}{CB}$, $\frac{CD}{CB}$ etc, dieselben bleiben, als wenn man, der leichtern Rechnung halber, CB = 1 setzt, wo dann die halben Vielecksseiten BD, AM schon die *sinus*, und die darauf gefällten Perpendikel CD, CM, die *cosinus* der entsprechenden Winkel BCD, ACM sind.

**) *sinus* und *cosinus* heissen sinnverwandt, eben so *tangente* und *cotangente*.

z. B. ist der sinus vom Winkel B (nämlich das gegenüber liegende Loth durch die Hypotenuse dividirt, § 2), derselbe Quotient $\frac{b}{a}$ ist aber in Beziehung auf den andern spitzen Winkel C der *cosinus* vom Winkel C (nämlich das anliegende Loth durch die Hypotenuse dividirt). In Zeichen:

$$\sin B = \frac{b}{a} = \cos C \qquad tg\, B = \frac{b}{c} = \cot C$$

$$\cos B = \frac{c}{a} = \sin C \qquad \cot B = \frac{c}{b} = tg\, C$$

Wäre z. B. $B = 30^0$, mithin $C = 90 - 30 = 60^0$, so haben wir bereits gefunden (§ 4), dass:

$$\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^0 \qquad tg\, 60^0 = \sqrt{3} = \cot 30^0$$

$$\cos 60^0 = \tfrac{1}{2} = \sin 30^0 \qquad \cot 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} = tg\, 30^0$$

Wäre $C = 80^0$, mithin $B = 10^0$, so wäre:

$$\sin 80^0 = \cos(90^0 - 80^0) = \cos 10^0 \text{ und}$$
$$\cos 80^0 = \sin(90^0 - 80^0) = \sin 10^0$$

Allgemein, wenn a einen beliebigen spitzen Winkel bedeutet:

$$\sin(90 - a) = \cos a \qquad tg(90 - a) = \cot a$$
$$\cos(90 - a) = \sin a \qquad \cot(90 - a) = tg\, a$$

6.

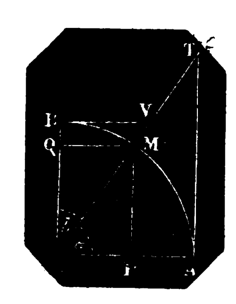
Durch vorhergehenden wichtigen Satz ist also — was die Berechnung der trigonometrischen Functionen für alle Winkel von 0 bis 90^0 betrifft — die Arbeit offenbar auf die Hälfte reducirt, weil man die trigonometrischen Functionen für alle Winkel von 45 bis 90^0 erhält, indem man nur die sinnverwandten Functionen derjenigen Winkel wieder abschreibt, welche erstere zu 90^0 ergänzen. So ist z. B.:

$$\sin 46^0 = \cos 44^0 \qquad \sin 47^0 = \cos 43^0$$
$$\cos 46^0 = \sin 44^0 \qquad \cos 47^0 = \sin 43^0$$

Es brauchten also die trigonometrischen Functionen nur für alle Winkel von 0 bis 45^0 berechnet zu werden. Dies geschah zuerst mit Zwischenräumen, welche dann durch Einschalten

der Proportionaltheile und durch Hülfe der §§ 45 und 47 ausgefüllt wurden, nach welchen man, aus bereits bekannten trigon. Functionen beliebiger Winkel, sehr leicht die trigon. Functionen für die Summen und Differenzen dieser Winkel finden und dadurch die gelassenen Zwischenräume der Tafel ausfüllen konnte. (Der wissbegierige Anfänger, der die Möglichkeit hiervon einsehen will, kann schon jetzt die, des Raumes halber hier nicht mit aufgenommenen, citirten Sätze §§ 45 u. 47 nachlesen.)

7.



Durch Hülfe des Kreises lassen sich die erklärten vier trigonometrischen Functionen, so wie auch der vorhergehende Satz § 5 auf folgende Weise versinnlichen.

So wie man nämlich die Zahlenbegriffe: e i n, z w e i etc. durch die Zeichen 1, 2, 3 ··· darstellen kann, so kann man sie auch durch Linien darstellen. Lässt man die Linie CA die Zahl e i n s bedeuten, so stellt offenbar eine zweimal so lange Linie die Zahl z w e i, eine halb so lange Linie den Bruch $\frac{1}{2}$ dar etc.

Beschreibt man nun zwischen den Schenkeln eines Winkels, *a*, mit der Linear-Einheit CA = 1 einen Bogen AM und fällt von dem Endpunct M auf CA das Perpendikel MP, so stellt schon MP den *sinus*, und CP den *cosinus* des Winkels *a* dar, weil hier die Division durch die Hypotenuse, weil sie die Einheit ist (CM = CA = 1), wegfällt, indem $\frac{MP}{CM} = \frac{MP}{1} = MP$ etc.

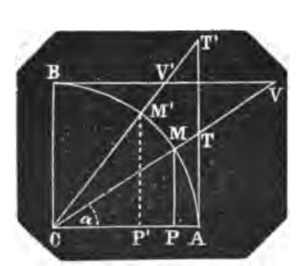
Um die *tangente* des Winkels *a*, nämlich den Quotienten $\frac{MP}{CP}$ durch eine einzige Linie zu versinnlichen, ziehe man durch A eine Berührungslinie, welche den verlängerten Schenkel CM in T schneidet so stellt, weil CA = 1 ist, die Linie AT die *tangente* des Winkels *a* dar: denn wegen Aehnlichkeit der Dreiecke MCP und TCA ist $\frac{MP}{CP} = \frac{TA}{CA} = \frac{AT}{1} = AT$.

Um endlich auch die *cotangente* des Winkels *a*, nämlich den Quotienten $\frac{CP}{MP}$ durch eine einzige Linie darzustellen, sei

der Bogen $\widehat{AM}$ bis zu einem Viertelkreise (Quadranten) fortgeführt, mithin der *radius* BC senkrecht auf AC, so dass also der Winkel *b* den Winkel *a* zu 90° ergänzt, ferner seien BV und MQ senkrecht auf BC, dann ist nämlich BV die *cotangente* des Winkels *a*, denn wenn BC = CA = 1 ist, so hat man, weil $\triangle MCP \cong \triangle MCQ$ und $\triangle MCQ \backsim VCB$, $\cot a = \frac{CP}{MP} = \frac{MQ}{CQ} = \frac{BV}{BC} = \frac{BV}{1} = BV$. Für die Trigonometrie hat diese gekünstelte Darstellung weiter keinen Nutzen, als vielleicht den Inhalt des folgenden § zu versinnlichen und dem Gedächtniss einzuprägen.*)

Grenzen der trigonometrischen Functionen.

8.



Aus der eben gezeigten bildlichen Darstellung der trigonometrischen Functionen oder auch aus dem rechtwinkligen Dreieck ist nun leicht zu ersehen, dass mit dem Wachsen eines Winkels auch dessen *sinus* und *tangente* wachsen, *cosinus* und *cotangente* aber abnehmen. Denn es sei CA der festliegende Schenkel des Winkels MCA = *a*, und dessen beweglicher Schenkel MC = 1 in die Lage M'C gekommen, so ist der Winkel MCA grösser, nämlich M'CP geworden, zugleich ist aber auch das ihm gegenüber liegende Loth (sein *sinus*) MP grösser, nämlich M'P' geworden. Fällt der bewegliche Schenkel MC mit BC (senkrecht auf CA) zusammen, so wird MP auch = MC = 1, oder was dasselbe ist: in dem Bruche $\frac{MP}{CM} = \sin a$, wird für $a = 90^0$ der Zähler

---

*) Zur historischen Notiz dienend, möge hier noch bemerkt werden, dass in der alten Kunstsprache: die Linie AP, als Zahl gedacht (für CA = 1), der *sinus versus* des Winkels *a*, und wenn von M auf BC das Perpendikel MQ gefällt wird, die Linie BQ der *cosinus versus*, ferner die Linie CT die *secante*, und CV die *cosecante* des Winkels *a* genannt wird, so dass also: $\sin vers\, a = 1 - \cos a$; $\cos vers\, a = 1 - \sin a$; $\sec a = \frac{1}{\cos a}$; $\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}$.

dem Nenner gleich, mithin $\sin 90^\circ = 1$. Wird dagegen der Winkel a immer kleiner, so wird auch sein *sinus*, MP, immer kleiner, und verschwindet mit dem Winkel, oder, was dasselbe sagt, in dem Bruch $\frac{MP}{CM} = \sin a$, wird für $a = 0^\circ$, der Zähler $MP = 0$, folglich $\sin 0^\circ = \frac{0}{CM} = 0$. Die *sinus* sind also immer echte Brüche (höchstens $= 1$).

Der *cosinus* eines Winkels $MCP = a$, nämlich CP, wird mit dem Wachsen des Winkels immer kleiner und für $a = 90^\circ$, wo P in C fällt, offenbar $= 0$, folglich $\cos 90^\circ = 0$. Dies folgt auch aus dem rechtwinkligen Dreieck MCP, indem der Zähler des Bruches $\frac{CP}{CM} = \cos a$, für $a = 90^\circ$, Null wird, daher $\cos 90^\circ = \frac{0}{CM} = 0$. Mit dem Abnehmen des Winkels a dagegen wird sein *cosinus*, nämlich CP, immer grösser und zuletzt gleich $CA = 1$, oder, was dasselbe ist: das anliegende Loth wird, für $a = 0^\circ$, der Hypotenuse gleich, daher im Bruche $\frac{CP}{CM} = \cos a$, für $a = 0^\circ$, der Zähler dem Nenner gleich, mithin $\cos 0^\circ = 1$. Die *cosinus* sind also auch immer echte Brüche (höchstens $= 1$).

Mit dem Abnehmen des Winkels a wird (für $CA = 1$) die *tangente* AT offenbar immer kleiner und verschwindet mit dem Winkel, indem dann T auf A fällt, oder in dem Bruche $\frac{MP}{CP} = tg\, a$, wird, für $a = 0^\circ$, auch der Zähler $= 0$, und der Nenner gleich CA, $= 1$, daher $tg\, 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$. Wächst dagegen der Winkel a, so wächst auch seine *tangente*, und muss zuletzt jede noch so grosse Zahl überschreiten. Ist der Winkel a schon beinahe 90° geworden, so geht die Linie CT fast parallel mit AT, der Durchschnittspunct T rückt, mit dem Wachsen des Winkels a, immer weiter von A, es ist also, wenn a sehr nahe $= 90^\circ$ ist, auch CA in AT (oder CP in MP) sehr viele mal (hundert, tausend, Millionen······ mal) enthalten. Wird aber $a = 90^\circ$, so hat (für $CA = 1$) die *tangente* AT alle bestimmten Zahlen überschritten, und ist also unendlich (∞) gross geworden, daher $tg\, 90^\circ = \infty$. Dasselbe folgt auch: weil in dem Quotienten $\frac{MP}{CP} = tg\, a$, für $a = 90^\circ$, das gegenüber liegende Loth

MP = BC, und das anliegende Loth CP = 0 wird; daher: $tg\,90^0 = \frac{BC}{0} = \infty$. *)

Mit dem Wachsen des Winkels MCP $= a$ wird offenbar die *cotangente* BV immer kleiner, und verschwindet für $a = 90^0$, wo V auf B fällt, daher $cot\,90^0 = 0$. Dasselbe folgt aus dem Bruche $\frac{CP}{MP} = cot\,a$, in welchem, für $a = 90^0$, der Zähler (das anliegende Loth) CP = 0, und der Nenner MP = CM = CB wird; daher $cot\,90^0 = \frac{0}{BC} = 0$. Nimmt dagegen der Winkel a immer fort bis 0 ab, so wird die *cotangente* dabei immer grösser und grösser, und es giebt keine so grosse Zahl, welche sie nicht überschreiten könnte, daher $cot\,0 = \infty$. Wir haben demnach folgende wohl zu merkende Formeln: **)

$sin\,0 = 0$	$sin\,90 = 1$
$cos\,0 = 1$	$cos\,90 = 0$
$tg\,0 = 0$	$tg\,90 = \infty$
$cot\,0 = \infty$	$cot\,90 = 0$

Einrichtung der trigonometrischen Tafeln.

9.

In der Einleitung ist gezeigt, dass wir vermittelst der trigonometrischen Functionen aus den in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreiecks die dadurch bestimmten Stücke leicht berechnen können, und zwar durch eine einfache Multiplication oder Division. Da man diese Operationen aber immer am bequemsten mit Logarithmen vollzieht, und es also sehr umständlich sein würde, zu gegebenen Winkeln erst die trigonometrischen Functionen

---

*) Dividirt man eine Zahl, z. B. die Einheit, durch immer kleinere Zahlen, so wird der Quotient immer grösser, z. B. $\frac{1}{0,1} = 10$; $\frac{1}{0,01} = 100$; $\frac{1}{0,001} = 1000$ etc., $\frac{1}{0} = \infty$. Eben so verhält es sich mit dem Ausdruck $\frac{MP}{CP} = tg\,a$. Wächst a von 0 bis 90^0, so wird der Zähler MP immer grösser, der Nenner CP immer kleiner, und zuletzt, für $a = 90^0$, wird $\frac{MP}{CP} = \frac{BC}{0} = \infty$.

**) Wir werden sämmtliche Formeln, so wie wir sie nach und nach finden, in § 100 übersichtlich zum Nachschlagen zusammen stellen.

und dann zu diesen Functionen wieder die Logarithmen zu suchen, so sind offenbar viel zweckmässiger und zugleich Raum sparend die trigonometrischen Functionen nicht selbst, sondern gleich ihre Logarithmen eingetragen, indem in den höchst seltenen Fällen, wo man die trigonometrische Function eines Winkels selbst nöthig hat, dieselbe ja leicht aus ihren Logarithmen gefunden werden kann. So haben wir z. B. § 4 gefunden, dass:

$$\begin{aligned} \sin 30^0 &= \tfrac{1}{2} = 0{,}5 \\ \cos 30^0 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}8660254 \\ tg\, 30^0 &= \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}5773502 \\ \cot 30^0 &= \sqrt{3} = 1{,}7320508 \end{aligned}$$

Mithin sollte in den trigonometrischen Tafeln stehen:

$$\begin{aligned} \log \sin 30^0 &= 0{,}6989700 - 1 \\ \log \cos 30^0 &= 0{,}9375306 - 1 \\ \log\ tg\, 30^0 &= 0{,}7614394 - 1 \\ \log \cot 30^0 &= 0{,}2385606 \end{aligned}$$

Da aber nach § 7 alle *sinus* und *cosinus*, ferner alle *tangenten* von 0 bis 45°, und alle *cotangenten* von 45 bis 90° immer echte Brüche sind, deren Logarithmen folglich negative Kennziffern haben, so hat man, um den Raum für die negativen Kennziffern zu sparen, sämmtliche Logarithmen (indem man zur positiven und negativen Kennziffer gleichviel addirt, wodurch deren Werthe nicht geändert werden) so geformt: dass sie alle 10 zur negativen Kennziffer haben, und dann, weil man dieses einmal weiss, bei Eintragung der Logarithmen diese negative Kennziffer (— 10) zur Ersparung des Raumes allenthalben weggelassen. So findet man z. B. in den Vega'schen Tafeln unter der Ueberschrift *log sinus* den Logarithmen des *sinus* von 30°, nämlich $\log \sin 30^0 = 9{,}6989700$ statt $\log \sin 30 = 9{,}6989700 - 10$. Der Anfänger muss also beachten, zu jedem aus der Tafel herausgeschriebenen Logarithmen einer trigonometrischen Function immer — 10, als negative Kennziffer, hinzuzufügen. So ist z. B. $\log tg\, 30^0 = 9{,}7614394 - 10$ und $\log \cot 30^0 = 10{,}2385606 - 10$.

10.

Die fernere Einrichtung der trigonometrischen Tafeln ist nun so: dass man die Logarithmen der trigonometrischen Functionen von in Graden und Minuten gegebenen Winkeln, wenn sie unter

45^0 sind, findet, indem man die Grade oberhalb (am Kopfe) und die Minuten linker Hand (in der ersten Spalte), dagegen von allen Winkeln über 45^0, indem man die Grade unten (am Fusse), die Minuten jetzt aber r e c h t e r Hand (in der letzten Spalte) sucht, und aus der gehörigen Spalte und der Querzeile, in welcher die Minuten stehen, den fraglichen Logarithmen heraus schreibt. So findet man z. B.:

$$\log \sin 36^0\ 10' = 9{,}7709522 - 10$$
$$\log \sin 53^0\ 50' = 9{,}9070370 - 10$$
$$\log \cos 36^0\ 10' = 9{,}9070370 - 10$$
$$\log \cos 53^0\ 50' = 9{,}7709522 - 10$$

Der Grund hiervon ist offenbar der: weil, wie in § 5 und § 6 gezeigt, die trigonometrische Function eines Winkels zugleich auch die sinnverwandte Function des Winkels ist, welcher ersteren zu 90^0 ergänzt, weshalb auch die Summe der auf einerlei Seite der Tafeln oben und unten stehenden Grade und der linker und rechter Hand in einerlei Querzeile stehenden Minuten immer $= 90^0$ sein muss.

11.

Um die Logarithmen der trigonometrischen Functionen für Winkel zu finden, welche in Graden, Minuten und Secunden ausgedrückt sind, überlege man Folgendes: Subtrahirt man mehrere von Minute zu Minute in den trigonometrischen Tafeln auf einander folgenden Logarithmen von einander, so zeigt sich, dass, innerhalb kleiner Intervalle, die Differenzen in den letzten Decimalen den Zunahmen der Minuten proportional sind. Man hat z. B.:

	Differenzen:	
	für 1′	für 1″
$\log \sin 43^0\ 2' = 9{,}8340541 - 10$		
$\log \sin 43^0\ 3' = 9{,}8341894 - 10$	1353	22,55
$\log \sin 43^0\ 4' = 9{,}8343246 - 10$	1352	22,53

Wächst also der Winkel von $43^0\ 2'$ um eine Minute, so wächst sein *log sinus* in den vier letzten Decimalen um 1353; wächst der Winkel von $43^0\ 2'$ um zwei Minuten, so wachsen die vier letzten Decimalen seines *log sinus* um 2 mal 1353 etc. Wächst also der Winkel von $43^0\ 2'$ um eine Secunde $= \frac{1}{60}'$, so werden offenbar die vier letzten Decimalen seines *log sinus* auch

nur um $\frac{1353}{60} = 22{,}55$ wachsen und um 2 mal $22{,}55 = 45{,}10$, wenn der Winkel um 2 Secunden zunimmt etc.

12.

Aus dem vorhergehenden § folgt nun von selbst die einfache Regel: Um zu einem in Graden, Minuten und Secunden gegebenen Winkel eine logarithmisch-trigonometrische Function zu finden, suche man dieselbe erst für die Grade und Minuten, multiplicire dann die in den Tafeln ausgesetzte Differenz für eine Secunde mit der Anzahl der Secunden und addire oder subtrahire das Product, je nachdem die trigonometrische Function mit dem Winkel wächst oder abnimmt (§ 7). So findet man z. B.:*)

$$\begin{aligned} \log \sin 43^{0}\,2' &= 9{,}8340541 \\ 12 \text{ mal } 22{,}55 &= \quad\;\; 271 \text{ also:} \\ \hline \log \sin 43^{0}\,2'\,12'' &= 9{,}8340812 - 10 \end{aligned}$$

Ebenso hat man:

$$\begin{aligned} \log \cos 43^{0}\,2' &= 9{,}8638917 \\ 12 \cdot (19{,}66) &= \quad\;\; 236 \text{ also:} \\ \hline \log \cos 43^{0}\,2'\,12'' &= 9{,}8638681 - 10 \end{aligned}$$

Ein Blick in die trigonometrischen Tafeln lehrt, dass für sehr kleine Winkel die logarithmischen Differenzen den Zunahmen der Minuten nicht proportional sind. Deshalb sind auch, der sichern und leichtern Rechnung halber, die Logarithmen der trigonometrischen Functionen anfangs von $\frac{1}{10}$ zu $\frac{1}{10}$ Secunde, dann von Secunde zu Secunde und dann von 10 zu 10 Secunden berechnet und eingetragen. (Vergl. die den Tafeln vorgedruckte Einleitung.)

13.

Der Grund, dass die log tg und log cot gleiche Differenzen haben und für dieselben deshalb nur eine Spalte nöthig war,

*) Alle in diesem Buche vorkommenden Logarithmen sind aus einer der am meisten verbreiteten ältern stereot. Ausgaben der Vega'schen Tafeln entnommen und können deshalb von den neuern Ausgaben, welche in den Proportionaltheilen noch die achte Decimale berücksichtigen, in der siebenten Decimale um eine Einheit abweichen. Die neueren Ausgaben enthalten die trigonometrischen Functionen von 10 zu 10 Secunden sammt den Proportionaltheilen für 1 bis 9 Secunden.

ist folgender: Ist von irgend einem Winkel, B, die *tangente* desselben $=\frac{b}{c}$, so ist die *cotangente* desselben $=\frac{c}{b}$, daher das Product beider immer $=1$. In Zeichen: $tg\,B \cdot \cot B = 1$. Hieraus folgt aber (weil $\log 1 = 0$):

$$\log tg\,B + \log \cot B = 0$$
$$\log tg\,B = -\log \cot B$$

Die erste Formel zeigt, dass wenn man die Logarithmen der *tang* und *cot* irgend eines Winkels addirt, die Summe immer $=0$ ist. Da ferner die Logarithmen zweier reciproker Grössen $\frac{b}{c}$ und $\frac{c}{b}$ immer gleich gross sind, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben (z. B. $\log \frac{3}{2} = 0{,}1760913$ und $\log \frac{2}{3} = -0{,}1760913$), so ist klar, dass sie auch gleiche Differenzen haben müssen. So ist z. B.:

$$\log tg\, 43^{0}\, 2'\, 12'' = 9{,}9702130 - 10 = -0{,}0297870$$
$$\log \cot 43^{0}\, 2'\, 12'' = 10{,}0297870 - 10 = +0{,}0297870$$

14.

Umgekehrt findet man zu einer nicht genau in den Tafeln enthaltenen logarithmisch trigonometrischen Function den zugehörigen Winkel, indem man die nächst kleinere von dem gegebenen subtrahirt, und in den Rest mit der Differenz für 1″ dividirt, dann giebt der Quotient die Anzahl Secunden, welche zu den, bei der nächst kleinern logarithmisch-trigonometrischen Function stehenden Graden und Minuten hinzu addirt, oder davon subtrahirt werden müssen, je nachdem die trigonometrischen Functionen mit dem Winkel wachsen, wie *sin* und *tg*, oder abnehmen, wie *cos* und *cot*. Wäre z. B. gegeben:

$$\log \sin x = 9{,}8340812, \text{ so ist:}$$
$$\log \sin 43^{0}\, 2' = 9{,}8340541$$
$$\cdots\cdots 271$$

Die Differenz für 1″ ist in dieser Gegend $=22{,}55$; daher $\frac{271}{22{,}55} = \frac{27100}{2255} = 12''$, mithin, weil der Winkel mit dem *sinus* wächst, der gesuchte Winkel $x = 43^{0}\, 2'\, 12''$.

Mit diesen Vorkenntnissen ausgerüstet, können wir nun zur wirklichen Berechnung der Dreiecke schreiten.

Zweites Buch.

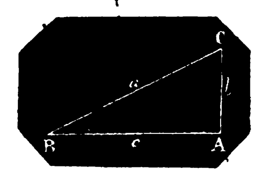
Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks.

15.

Die leichten Regeln für die Berechnung des **rechtwinkligen** Dreiecks folgen von selbst aus den Erklärungen der trigonometrischen Functionen. (§ 2). Wird nämlich eine Gleichung zwischen zwei Seiten und einem Winkel verlangt, so geben die beiden Seiten, gehörig zur Division (als Quotient) angesetzt, die entsprechende trigonometrische Function des Winkels, und man braucht dann diese kleine Formel, im Fall nicht der Winkel, sondern die eine Seite gesucht wird, nur noch auf die gesuchte Seite zu reduciren, wie folgende Beispiele zeigen.

16.





Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und ein Winkel gegeben: $a = 2057898$, $B = 35^\circ\ 26'\ 14''$. Man sucht die übrigen Stücke b, c, C

Auflösung. Man hat: $C = 90 - B = 54^\circ\ 33'\ 46''$, dann (§ 2):

$$\frac{b}{a} = \sin B \quad \text{und} \quad \frac{c}{a} = \cos B \ (\S\ 2),$$

hieraus: $b = a \sin B$ und $c = a \cos B$ *)

$\log \sin B = 9{,}7632861 - 10$	$\log \cos B = 9{,}9110250 - 10$
$\ldots\ a = 6{,}3134239$	$a = 6{,}3134239$
$\log b = 6{,}0767100$	$\log c = 6{,}2244489$
$b = 1193191$	$c = 1676675$

*) In Worten: Die Hypotenuse mit dem *sinus* multiplicirt, giebt das gegenüber liegende Loth, mit dem *cosinus* multiplicirt, das anliegende Loth. Wer diese kurze Regel im Gedächtniss hat, kann aus der Hypotenuse und einem der spitzen Winkel leicht die ihm gegenüber und anliegenden Lothe berechnen.

17.

Aufgabe. Es ist eine Cathete und ein Winkel gegeben, nämlich: $c=1300579$, $B=65^0\ 18'\ 40''$.

Man sucht die übrigen Stücke C, b, a.

Auflösung. Man hat $C=90-B$, dann:

$$\frac{b}{c}=tg\,B \qquad b=c\,tg\,B$$

$$\cos B=\frac{c}{a} \qquad a\cdot\cos B=c \qquad a=\frac{c}{\cos B}$$

$\log tg\,B=10,3375125-10$
$\cdots\cdots c=\ \ 6,1141367$
$\cdots b=\ \ 6,4516492$
$b=\ \ 2829106$

$\log c=6,1141367$
$\cdots \cos B=9,6208550-10$
$\cdots\cdots a=6,4932817$
$a=3113735$

18.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse a und eine Cathete, b, gegeben: $a=3798,47$; $b=1480,99$. Man sucht die übrigen Stücke c, B, C.

Auflösung. Man hat:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$
$$c=\sqrt{(a+b)(a-b)}$$

$\log(a+b)=3,7225895$
$\cdots\cdots (a-b)=3,3650160$
$2)\ 7,0876055$
$\log c=3,5438027$
$c=\ \ 3497,862$

$$\sin B=\frac{b}{a}=\cos C$$

$\log b=3,1705522$
$\cdots a=3,5796087$
$\log \sin B=9,5909435-10$
$B=22^0\ 56'\ 52''$
$C=67^0\ \ 3'\ \ 8''$

19a.

Aufgabe. Es sind gegeben beide Catheten: $b=0,8745932$, $c=0,5670073$. Man sucht die Winkel B und C und die Hypotenuse a.

Auflösung. Man hat:

$$tg\,B=\frac{b}{c}=\cot C$$

$\log b=0,9418061-1$
$\cdots\cdots c=0,7535886-1$
$\log tg\,B=10,1882175$
$B=57^0\ 2'\ 39''$
$C=32^0\ 57'\ 21''$

$$a=\sqrt{b^2+c^2}$$

oder kürzer (indem man erst den Winkel B berechnet):

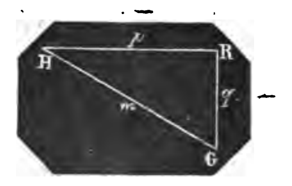
$$a=\frac{b}{\sin B}$$

$\log b=0,9418061-1$
$\cdots \sin B=9,9238086-10$
$\log a=0,0179975$
$a=1,042311$

19b.

Um Sicherheit und Gewandtheit in der Berechnung rechtwinkliger Dreiecke zu erlangen, wird der Anfänger wohl thun, die folgenden 9 Aufgaben mehrmals zu lösen und dabei jedesmal das bei R rechtwinklige Dreieck in eine andere Lage zu zeichnen.

	Gegeben	Gesucht.	Auflösung.
1	m, G	p, q	$p = m \sin G$ $q = m \cos G$
2	m, H	p, q	$p = m \cos H$ $q = m \sin H$
3	p, H	q, m	$q = p\, tg\, H$ $m = \frac{p}{\cos H}$
4	p, G	q, m	$q = p \cot G = \frac{p}{tg\, G}$ $m = \frac{p}{\sin G}$
5	q, G	p, m	$p = q\, tg\, G$ $m = \frac{q}{\cos G}$
6	q, H	p, m	$p = q \cot H = \frac{q}{tg\, H}$ $m = \frac{q}{\sin H}$
7	m, q	p, H, G	$p = \sqrt{(m+q)(m-q)}$ $\sin H = \frac{q}{m} = \cos G$
8	m, p	q, H, G	$q = \sqrt{(m+p)(m-p)}$ $\cos H = \frac{p}{m} = \sin G$
9	p, q	H, G, m	$tg\, H = \frac{q}{p} = \cot G$ $m = \sqrt{(p^2+q^2)}$



Anmerkung. Bei der 4ten Aufgabe hat man:

$\frac{q}{p} = \cot G$ und auch

$\frac{p}{q} = tg\, G$. Aus der 1sten Gleichung folgt

$q = p \cot G$ und aus

der 2ten: $q = \frac{p}{tg\, G}$. Es ist also einerlei, ob man eine Grösse mit der *cotangente* eines Winkels multiplicirt oder durch die *tangente* desselben dividirt und umgekehrt. Dies folgt schon aus § 13, wornach immer $tg\, G \cdot \cot G = 1$, mithin: $\cot G = \frac{1}{tg\, G}$ und

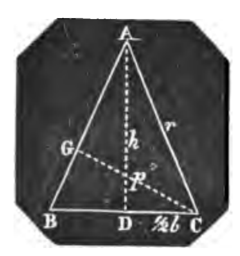
$$tg\, G = \frac{1}{\cot G}.$$

Drittes Buch.

Berechnung der gleichschenkligen Dreiecke und regelmässigen Vielecke.



20.



Aufgabe. Es sind die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks und der Winkel an der Spitze gegeben, nämlich: $AB = AC = r = 15079{,}38$ und der Winkel $BAC = A = 50^{0}\ 16'48''$. Man sucht die Grundlinie $BC = b$, die Höhe $AD = h$ und den Flächeninhalt F.

Auflösung. Weil durch das Perpendikel AD das gleichschenklige Dreieck in zwei gleiche rechtwinklige zerlegt wird, so hat man:

$$\frac{\frac{1}{2}b}{r} = \sin\tfrac{1}{2}A \qquad\qquad \frac{h}{r} = \cos\tfrac{1}{2}A$$

$$b = 2r\sin\tfrac{1}{2}A \qquad\qquad h = r\cos\tfrac{1}{2}A$$

$\log\sin\frac{1}{2}A = 9{,}6282167 - 10$	$\log\cos\frac{1}{2}A = 9{,}9567793 - 10$
$\cdots\cdots\; r = 4{,}1783834$	$\cdots\cdots\; r = 4{,}1783834$
$\cdots\cdots\; 2 = 0{,}3010300$	
$\cdots\cdots\; b = 4{,}1076301$	$\cdots\cdots\; h = 4{,}1351627$
$b = 12812{,}39$	$h = 13650{,}94$

Den Flächeninhalt $F = \frac{1}{2}bh$ könnte man erhalten, indem man die für $\frac{1}{2}b$ und h gefundenen Ausdrücke $r\sin\frac{1}{2}A$ und $r\cos\frac{1}{2}A$ mit einander multiplicirt, dies gäbe $F = r^2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$. Man erhält aber für den Inhalt F eine bequemere Formel, wenn man

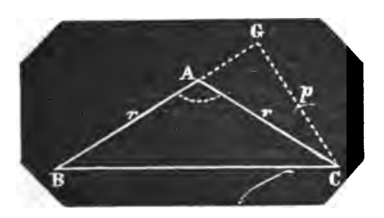
AB $=r$ als Grundlinie betrachtet und auf diese das Perpendikel CG $=p$ fällt; dann hat man aus dem rechtwinkligen Dreieck ACG, $\frac{p}{r} = \sin A$, mithin $p = r \sin A$. Dies mit der halben Grundlinie ($\frac{1}{2}$AB $= \frac{1}{2}r$) multiplicirt, kommt:

$$F = \tfrac{1}{2} r^2 \sin A$$

$$\begin{aligned} \log \sin A &= 9{,}8860260 - 10 \\ 2 \log r &= 8{,}3567668 \\ 0{\cdot}5 &= 0{,}6989700 - 1 \\ \hline F &= 7{,}9417628 \\ F &= 87450600 \,\square' \end{aligned}$$

21.

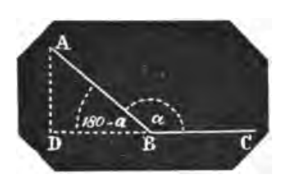
Bei vorstehender Formel für den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks ($F = \frac{1}{2} r^2 \sin A$) ist jedoch zu bemerken, dass, wenn der Winkel A an der Spitze ein stumpfer ist, das Perpendikel CG $=p$, womit die halbe Grundlinie ($\frac{1}{2}$AB $= \frac{1}{2}r$) multiplicirt werden muss, ausserhalb des Dreiecks auf die Verlängerung der Grundlinie fällt. Da aber aus dem gegebenen stumpfen Winkel A leicht sein Nebenwinkel G$\hat{A}$C $= 180 - A$ zu berechnen und dann $\frac{p}{r} = \sin(180 - A)$ ist, so hat man: $p = r \sin(180 - A)$. Die vorhergehende Formel für den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks: $F = \frac{1}{2} r^2 \sin A$, könnte also, im Fall der Winkel A stumpf wäre, durch $F = \frac{1}{2} r^2 \sin(180 - A)$ ausgedrückt werden. Allein dieser Fall braucht gar nicht als ein besonderer betrachtet und durch eine eigene Formel dargestellt zu werden. Der erste Begründer der Trigonometrie bemerkte nämlich bald, dass erstere Formel $F = \frac{1}{2} r^2 \sin A$ beide Fälle begreift und folglich allgemein ist, der Winkel A möge spitz oder stumpf sein, wenn man nur den Begriff des *sinus*, der anfangs auf spitze Winkel beschränkt wurde, erweitert und auch auf stumpfe Winkel ausdehnt, wobei man dann aber die kleine Regel zu merken hat: dass der *sinus* eines stumpfen Winkels gleich ist dem *sinus* seines Nebenwinkels, und dass man — weil in den trigonometrischen Tafeln keine



stumpfen Winkel vorkommen — um den *sinus* eines stumpfen Winkels mittelst der Tafeln zu finden, diesen Winkel erst von 180^0 abziehen und dann zu dem Rest den *sinus* nehmen muss; so ist z. B.: $\sin 150^0 = \sin(180 - 150) = \sin 30^0$, $\sin 120^0 = \sin 60^0$. Allgemein, wenn a irgend einen Winkel, spitz oder stumpf, bedeutet:

$$\sin(180 - a) = \sin a$$

22.



Diese Erweiterung des Begriffs *sinus* hebt aber keineswegs die § 2 gegebene Erklärung desselben auf, denn es sei $A\hat{B}C = a$ ein stumpfer Winkel. Schneidet man von dem einen Schenkel ein beliebiges Stück, BA, ab, fällt von A auf den andern Schenkel (hier also auf die Verlängerung desselben) das Perpendikel AD, so kann man dies Perpendikel AD sowohl dem Winkel a, als auch seinem Nebenwinkel $180^0 - a$ gegenüber liegend betrachten, und es ist dann, nach der gegebenen Erklärung, $\sin a = \sin(180 - a) = \frac{AD}{AB}$ *)

23.

Aus vorhergehendem § folgt, dass die *sinus* zweier Nebenwinkel vollkommen gleich sind, ferner, dass der zu einem bestimmten Winkel gehörige *sinus* vollkommen bestimmt ist, der Winkel möge spitz oder stumpf sein. Umgekehrt aber, dass der zu einem bestimmten *sinus* gehörige Winkel unbestimmt ist, indem zu ihm, ausser dem spitzen Winkel, den man in den Tafeln aufschlägt, auch noch der stumpfe Nebenwinkel gehört.

24 a.

Aufgabe. Es ist von einem gleichschenkligen Dreieck der Winkel an der Spitze $A = 140^0\, 16'\, 28''$ und die Länge der Schenkel $AB = AC = r = 505',67$ gegeben. Man sucht den Inhalt F?

---

*) Hätten wir den Begriff des *sinus*, so wie nun erst hier geschehen, schon zu Anfang des § 2 auf den stumpfen Nebenwinkel ausdehnen wollen, so hätte der Anfänger noch nicht den Zweck und Nutzen davon einsehen, also auch nicht mit klaren Begriffen folgen können.

Auflösung. Nach § 21 hat man:

$$F = \tfrac{1}{2} r^2 \sin A$$

$\log \sin A = 9{,}8055762 - 10$
$\cdots\cdots r^2 = 5{,}4077344$
$\cdots\cdots 0{,}5 = 0{,}6989700 - 1$
$\cdots\cdots F = 4{,}9122806$
$F = 81711 \square'$

180^0
$A = 140 \cdot 16 \cdot 28$
$180 - A = 39^0\, 43'\, 32''$

24b.

Aufgabe. Von einem gleichschenkligen Dreieck sind die Schenkel $AB = AC = r = 304'$ und der Flächeninhalt $F = 7945 \square'$ gegeben. Wie gross ist der Winkel A an der Spitze?

Auflösung. Aus der Formel $F = \tfrac{1}{2} r^2 \sin A$ (§ 24) folgt:

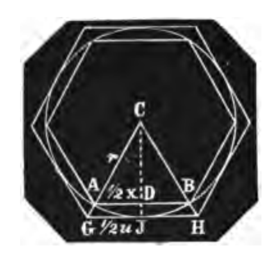
$$\sin A = \frac{2F}{r^2}$$

$\log F = 3{,}9000939$
$\cdots 2 = 0{,}3010300$
$4{,}2011239$
$2 \log r = 4{,}9657472$
$\log \sin A = 9{,}2353767 - 10$
also $A = 9^0\, 54'\, 2''$
oder auch $A = 170^0\, 5'\, 58''$ (§ 23)

Dass die vollständige Auflösung hier zwei Winkel geben muss, ist leicht einzusehen, weil die beiden Dreiecke CAB und CAD (wenn man $AD = AB$ nimmt), wegen gemeinschaftlicher Spitze C und gleicher Grundlinien, $AB = AD$, auch gleichen Inhalt haben. Der gesuchte Winkel A kann also sowohl $B\hat{A}C = 9^0\, 54'\, 2''$ als auch $C\hat{A}D = 170^0\, 5'\, 58''$ sein. Vergleiche Geometrie § 202.

25.

Aufgabe. Es ist der Radius eines Kreises, $AC = r$, gegeben. Man sucht die Seiten $AB = x$, und $GH = u$, der ein- und umgeschriebenen regelmässigen nEcke, so wie deren Inhalte f und F.



Auflösung. Es ist der Winkel ACB $= C = \frac{360}{n}$, daher: $\frac{\frac{1}{2}x}{r} = \sin\frac{1}{2}C$ und $\frac{GJ}{CJ} = \frac{\frac{1}{2}u}{r} = tg\frac{1}{2}C$; hieraus:

$x = 2r\sin\frac{1}{2}C$ $\quad f = n\cdot\frac{1}{2}r^2\sin C$

$u = 2r\ tg\frac{1}{2}C$ $\quad F = n\cdot r^2\ tg\frac{1}{2}C$

Sei z. B. $r = 1'$, $n = 7$ gegeben, so findet man:

$C = 51^0\,25'\,42\frac{6}{7}''$; $\frac{1}{2}C = 25^0\,42'\,51\frac{3}{7}''$; $n\cdot\frac{1}{2}r^2 = \frac{7}{2} = 3{,}5$; $n\cdot r^2 = 7$.

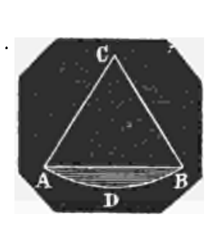
$\log\sin\frac{1}{2}C = 9{,}6373733 - 10$
$\cdots\cdots\ 2r = 0{,}3010300$
$\cdots\cdots\ x = 0{,}9384033 - 1$
$x = 0{,}8677674$

$\log\sin C = 9{,}8931131 - 10$
$\cdots\ n\cdot\frac{1}{2}r^2 = 0{,}5440680$
$\cdots\cdots\ f = 0{,}4371811$
$f = 2{,}73641$

$\log tg\frac{1}{2}C = 9{,}6826636 - 10$
$\cdots\cdots\ 2r = 0{,}3010300$
$\cdots\cdots\ u = 0{,}9836936 - 1$
$u = 0{,}96315$

$\log tg\frac{1}{2}C = 9{,}6826636 - 10$
$\cdots\ n\cdot r^2 = 0{,}8450980$
$\cdots\cdots\ F = 0{,}5277616$
$F = 3{,}371021$

26.



Aufgabe. Gegeben: $AC = r = 12',5$ $C = 42^0\,13' = 42^0{,}21667..$ Man sucht die Fläche des Kreisabschnitts ADB $= F$?

Auflösung. Die Fläche des Ausschnitts ist $= r^2\pi\frac{C}{360}$ und die des Dreiecks $= \frac{1}{2}r^2\sin C$ (§ 21), mithin die Fläche des Abschnitts:

$$F = r^2\pi\frac{C}{360} - \frac{1}{2}r^2\sin C$$

$\log r^2 = 2{,}1938200$
$\cdots\ \pi = 0{,}4971499$
$\cdots\ C = 1{,}6254840$
$4{,}3164539$
$\cdots\ 360 = 2{,}5563025$
$r^2\pi\frac{C}{360} = 1{,}7601514$
$r^2\pi\frac{C}{360} = 57{,}56405$

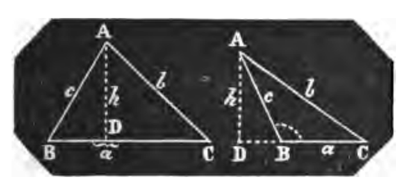
$\log\sin C = 9{,}8273279 - 10$
$\cdots\ r^2 = 2{,}1938200$
$\cdots\ 0{,}5 = 0{,}6989700 - 1$
$\cdots\ \frac{1}{2}r^2\sin C = 1{,}7201179$
$\frac{1}{2}r^2\sin C = 52{,}495$

$F = 5{,}06905\ \square'$

Viertes Buch.

Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks.

27.



Lehrsatz. In jedem Dreieck verhalten sich je zwei Seiten zu einander wie die *sinus* der gegenüber liegenden Winkel.*)

Beweis. Man denke das Perpendikel $AD = h$ gefällt, so hat man aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken ADB und ADC:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{h}{c} = \sin B \ldots (1) \\ \frac{h}{b} = \sin C \ldots (2) \end{array}\right\} \text{dividirt man (1) durch (2), so folgt:}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

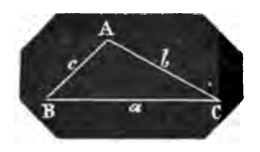
Da die *sinus* zweier Nebenwinkel, zufolge des § 21 erweiterten Begriffs, einander gleich sind, so ist der hier ausgesprochene wichtige Satz: dass sich in jedem Dreieck die Seiten wie die *sinus* der gegenüber liegenden Winkel verhalten, allgemein gültig, das Dreieck möge spitzwinklig oder stumpfwinklig sein, denn die beiden Gleichungen (1) und (2) gelten sowohl für Fig. 2 als für Fig. 1. — Denkt man noch vom Winkel C ein Perpendikel auf die gegenüber liegende Seite c (oder deren Verlängerung Fig. 2) gefällt, so findet man durch gleiche Schlüsse: $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$, mithin ist allgemein:

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

*) Es ist üblich, die Seiten eines Dreiecks mit kleinen und die gegenüber liegenden Winkel mit den gleichnamigen grossen Buchstaben zu bezeichnen

Diese sogenannte *Sinus*-Regel wird immer angewandt, **wenn von** einem Dreieck eine Seite und zwei Winkel, oder zwei Seiten und ein gegenüber liegender Winkel gegeben sind, mithin jedesmal, wenn eine Gleichung zwischen vier Stücken, die paarweise gegenüber liegen, gesucht wird

28.



Aufgabe. Von einem Dreiecke, ABC, sind eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben, z. B. $a = 2057',8$, $B = 54^0\, 17'\, 12''$, $C = 41^0 39' 10''$. Man sucht die beiden andern Seiten b, c und den Flächeninhalt F?

Auflösung. Zuerst findet man den dritten Winkel $A = 180 - (B + C) = 84^0\, 3'\, 38''$; dann, nach der *Sinus*-Regel:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} \qquad\qquad \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A} \qquad\qquad c = a\frac{\sin C}{\sin A}$$

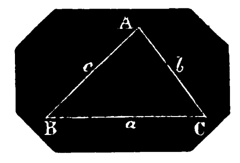
$$\begin{array}{rl} \log \sin B = & 9{,}9095280 - 10 \\ \cdots\cdots a = & 3{,}3134032 \\ \hline & 13{,}2229312 - 10 \\ \cdot\cdot \sin A = & 9{,}9976624 - 10 \\ \hline \cdots\cdots b = & 3{,}2252688 \\ b = & 1679{,}843 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} \log \sin C = & 9{,}8225700 - 10 \\ \cdots\cdots a = & 3{,}3134032 \\ \hline & 13{,}1359732 \\ \cdots \sin A = & 9{,}9976624 \\ \hline \cdots\cdots c = & 3{,}1383108 \\ c = & 1375{,}025 \end{array}$$

Um den Inhalt F zu erhalten, suche man erst das von der Spitze A auf die Grundlinie a gefällte Perpendikel h. Weil $\frac{h}{b} = \sin C$, so ist: $h = b \sin C$, und da, wie vorhin gefunden: $b = a\frac{\sin B}{\sin A}$, so ist auch: $h = a\frac{\sin B}{\sin A}\sin C$, mithin ist:

$$F = \tfrac{1}{2}a^2\frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin A}$$

$$\begin{array}{rl} \log \sin B = & 9{,}9095280 - 10 \\ \cdots \sin C = & 9{,}8225700 - 10 \\ \cdots\cdots a^2 = & 6{,}6268064 \\ \cdots\cdot 0{,}5 = & 0{,}6989700 - 1 \\ \hline & 27{,}0578744 - 21 \\ \cdot\cdot \sin A = & 9{,}9976624 - 10 \\ \hline \cdots\cdots F = & 6{,}0602120 \\ F = & 1148714 \,\square' \end{array}$$

29.



Aufgabe. Von einem Dreieck, ABC, sind zwei Seiten b, c und ein der grössern Seite c gegenüber liegender Winkel, C, gegeben. Man sucht die übrigen Stücke

Auflösung. Man suche zuerst den, der kleinern Seite b gegenüber liegenden Winkel B. Nach der *Sinus*-Regel ist

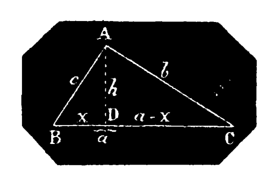
$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}$$

$$\sin B = \frac{b}{c} \sin C$$

Weil $b < c$, so muss auch $B < C$, mithin Winkel B **jedenfalls** spitz sein. (Geometrie §§ 55 und 56.) Ferner hat man nun $A = 180 - (B + C)$, und dann:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \text{ woraus: } a = b \frac{\sin A}{\sin B}$$

30.



Lehrsatz. I n j e d e m D r e i e c k i s t d e r *c o s i n u s* e i n e s W i n k e l s g l e i c h d e n Q u a d r a t e n d e r b e i d e n i h n e i n s c h l i e s s e n d e n S e i t e n, w e n i g e r d e m Q u a d r a t e d e r i h m g e g e n ü b e r l i e g e n d e n S e i t e, d i v i d i r t d u r c h d a s d o p p e l t e P r o d u c t d e r b e i d e n i h n e i n s c h l i e s s e n d e n S e i t e n.*)

Es ist z. B. in Bezug auf den Winkel B:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

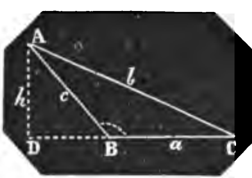
Beweis. Denkt man das Perpendikel $AD = h$ gefällt, und setzt $BD = x$, also $DC = a - x$, so hat man: $h^2 = c^2 - x^2$ und auch $h^2 = b^2 - (a - x)^2$; mithin: $b^2 - (a - x)^2 = c^2 - x^2$. Aus dieser Gleichung folgt: $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$. Dividirt man diesen für x gefundenen Ausdruck durch c und bedenkt, dass $\frac{x}{c} = \cos B$ (§ 2), so erhält man obige Formel.

---

*) Dieser Satz, die sogenannte *Cosinus*-Regel, ist wichtig und deshalb dem Gedächtniss wohl einzuprägen.

Anmerkung. Der Ausdruck $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$ giebt an, wie weit der Fusspunct D des Perpendikels AD von B gegen C hin fällt. Wäre z. B. $a = 8'$, $b = 6'$, $c = 4'$, so wäre $x = \frac{44}{16}$, und es wäre dann: $\cos B = \frac{11}{16}$.

Ist der Winkel B ein stumpfer (Fig. 2), so fällt das Loth AD



ausserhalb des Dreiecks auf die rückwärts verlängerte Linie BC, und es ist dann $b^2 > a^2 + c^2$. Obiger, für den Abstand des Punctes D von B gefundene Ausdruck: $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$, gilt aber auch für diesen Fall, wenn man nur das Vorzeichen des Resultats, welches hier negativ wird, richtig deutet. Wäre z. B. $a = 8'$, $b = 12'$, $c = 6'$, so wäre $x = -\frac{11'}{4}$. Das Minuszeichen deutet hier nun an, dass der Fusspunct D des Perpendikels nicht, wie bei der Ableitung der Formel $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$ vorläufig angenommen, in der Richtung BC, sondern in gerade entgegengesetzter Richtung BD um $\frac{11'}{4}$ von B entfernt liegt.*) Nimmt man aber diese negative Grösse $x = -DB$ als positiv und dividirt durch c, so ist der Quotient $\frac{DB}{c}$ der *cosinus* von dem spitzen Nebenwinkel ABD, durch dessen Subtraction von 180° der fragliche stumpfe Winkel B bestimmt wird. Der erste Begründer der Trigonometrie kam deshalb auf den nahe liegenden Gedanken: auch den Begriff des *cosinus* zu erweitern und auf stumpfe Winkel auszudehnen, nämlich: der *cosinus* eines stumpfen Winkels ist an Grösse gleich dem *cosinus* des Nebenwinkels, aber negativ, z. B. (Fig. 2) $\cos ABC = -\cos ABD$.

31.

Mit dieser Erweiterung des Begriffs *cosinus* umfasst also die vorhin aufgestellte Formel: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, beide Fälle, der Winkel B möge spitz oder stumpf sein. Giebt die Formel ein

*) Vergleiche, wegen dieses, für den Anfänger schwierigen Punctes, Algebra § 126

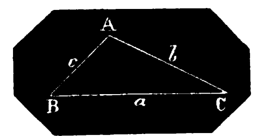
positives Resultat, so schlägt man den dazu gehörigen spitzen Winkel unmittelbar in den Tafeln auf. Giebt die Formel ein negatives Resultat, so sehe man es vorläufig als positiv an, suche den dazu gehörigen spitzen Winkel in den Tafeln und subtrahire denselben von 180°.

32.

Es folgt hieraus zugleich, dass es nicht nöthig war, auch die stumpfen Winkel in die Tafeln aufzunehmen, indem diese durch ihre Nebenwinkel bestimmt sind, und da nach Ableitung und Festsetzung der Begriffe die *sinus* zweier Nebenwinkel vollkommen gleich sind und eben so die *cosinus* zweier Nebenwinkel gleich gross und nur entgegen gesetzt sind, so folgt, dass man auch mit Hülfe der Tafeln den *cosinus* eines stumpfen Winkels findet, indem man ihn nur von seinem spitzen Nebenwinkel, aber mit dem *Minus*-Zeichen (negativ) nimmt. Es ist z. B. $\cos 120^0 = -\cos(180-120) = -\cos 60^0$; eben so hat man: $\cos 150^0 = -\cos(180-150) = -\cos 30^0$. Allgemein, wenn a irgend einen spitzen oder stumpfen Winkel bedeutet:

$$\cos(180-a) = -\cos a$$

33.



Aufgabe. Es sind alle drei Seiten eines Dreiecks gegeben: z. B. $a=13$, $b=10$, $c=7$. Man sucht die Winkel.

Auflösung. Nach § 30 hat man:

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{169+49-100}{2\cdot 13\cdot 7} \text{ oder:}$$

$$\cos B = \frac{118}{182}$$

$\log 118 = 2,0718820$
$\cdots 182 = 2,2600714$
$\cdots \cos B = 9,8118106 - 10$
$B = 49^0\, 34'\, 57'',3$

Eben so hat man § 30:

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{169+100-49}{2\cdot 13\cdot 10} \text{ oder:}$$

$$\cos C = \frac{220}{260}$$

$\log 220 = 2,3424227$
$\cdots 260 = 2,4149733$
$\cdots \cos C = 9,9274494 - 10$
$C = 32^0\, 12'\, 15'',1$

Ferner § 30:

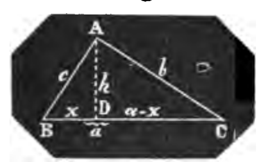
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{100 + 49 - 169}{2 \cdot 10 \cdot 7}$$

$\cos A = -\frac{20}{140}$ | $\log 20 = 1{,}3010300\,(n)$ *)
$\cdot\cdot\ 140 = 2{,}1461280$
$A = 98^0\ 12'\ 47'',6$ | $\cdot\cdot \cos A = 9{,}1549020 - 10\,(n)$
$B = 49 \cdot 34 \cdot 57{,}3$ | $180 - A = 81^0\ 47'\ 12'',4$
$C = 32 \cdot 12 \cdot 15{,}1$ | $A = 98^0\ 12'\ 47'',6$
$A + B + C = 180^0$

34.

Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man aus den drei gegebenen Seiten a, b, c eines Dreiecks den Flächeninhalt F desselben berechnen kann.

Auflösung. Obgleich diese Aufgabe in jedem Lehrbuche der Elementar-Geometrie schon vorkommt, so ist sie doch eine wirklich trigonometrische und darf deshalb hier nicht fehlen.



Setzt man die erst zu findende unbekannte Höhe des Dreiecks AD $= h$ und BD $=$ x, so ist:

$$h^2 = c^2 - x^2 = (c + x)(c - x)$$

und wenn man hierin den § 30 für x gefundenen Ausdruck $\left(x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$ substituirt:

$$h^2 = \left(c + \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2a}\right)\left(c - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2a}\right)$$

$$h^2 = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}$$

$$h^2 = \frac{(a + c)^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{b^2 - (a - c)^2}{2a}$$

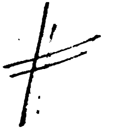
$$h^2 = \frac{(a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)}{4a^2}$$

$$h = \frac{\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}}{2a}$$

*) Das angehängte (n) bedeutet, dass die zu dem Logarithmen gehörige Zahl (20) negativ ist.

Multiplicirt man diesen für die Höhe gefundenen Ausdruck mit der halben Grundlinie $\left(\frac{a}{2}\right)$, so erhält man die merkwürdige und wichtige Formel für den Flächeninhalt, nämlich:

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$



Um sie für die numerische Rechnung noch etwas bequemer zu formen, setze man die Summe der drei Seiten $= s$, nämlich:

$$\begin{aligned} a+b+c &= s = 2\cdot\tfrac{1}{2}s, \text{ mithin:} \\ a+b-c &= 2\cdot\tfrac{1}{2}s - 2c = 2(\tfrac{1}{2}s - c) \\ a+c-b &= 2(\tfrac{1}{2}s - b) \\ b+c-a &= 2(\tfrac{1}{2}s - a). \end{aligned}$$

Dies in obige Formel substituirt, kommt:

$$F = \sqrt{\tfrac{1}{2}s(\tfrac{1}{2}s-a)(\tfrac{1}{2}s-b)(\tfrac{1}{2}s-c)}$$

Es sei z. B.:

Gegeben:	so ist:	Logarithmen:
$a = 13$	$\tfrac{1}{2}s = 15$	1,1760913
$b = 10$	$\tfrac{1}{2}s - a = 2$	0,3010300
$c = 7$	$\tfrac{1}{2}s - b = 5$	0,6989700
$s = 30$	$\tfrac{1}{2}s - c = 8$	0,9030900
		2) 3,0791813
		$\log F = 1,5395906$
		$F = 34,641$ □'

35.

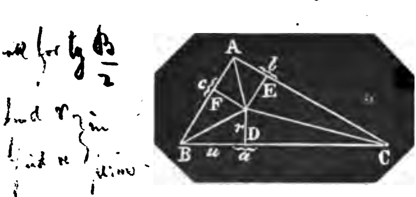
Obgleich die § 30 entwickelte Formel zur Berechnung eines Winkels aus den drei Seiten eines Dreiecks, die sogenannte *Cosinus*-Regel, theoretisch wichtig ist, so ist sie doch für die logarithmische Rechnung, wenn die Seiten durch grosse Zahlen gegeben sind, sehr unbequem, und wir wollen deshalb, für diesen rein practischen Zweck, noch eine besondere, für die numerische Rechnung bequemere Formel ableiten.

Denkt man sich die drei Winkel des Dreiecks halbirt, vom gemeinschaftlichen Durchschnittspunct der Halbirungslinien Perpendikel auf die drei Seiten gefällt, und bezeichnet diese gleichen Perpendikel mit r (Geometrie § 76), den als bekannt anzusehenden Flächeninhalt mit F, so hat man:

$$\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}=F, \text{ woraus:}$$

$$r=\frac{2F}{a+b+c}$$

Setzt man noch BD$=u$, so ist (weil BF$=$BD, AF$=$AE und CE$=$CD, also CD$+$AF$=$AC$=b$):



$$2u+2b=a+b+c, \text{ hieraus:}$$

$$u=\frac{a+c-b}{2}$$

Nun ist $tg\frac{1}{2}B=\frac{r}{u}=\frac{2F}{a+b+c}\cdot\frac{2}{a+c-b}$. Hierin für F seinen Werth aus vorhergehendem § gesetzt:

$$tg\tfrac{1}{2}B=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{(a+b+c)(a+c-b)}$$

$$tg\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{(a+b+c)^2(a+c-b)^2}}$$

$$tg\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{(a+b+c)(a+c-b)}}$$

Oder, wenn man Kürze halber wieder, wie in § 34, $a+b+c=s$ setzt:

$$tg\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-c)}{\frac{1}{2}s\cdot(\frac{1}{2}s-b)}}$$

Beispiel. Es sei wieder, wie in § 33:

gegeben:	so ist:	
$a=13$	$\frac{1}{2}s=15$	$log(\frac{1}{2}s-a)=0,3010300$
$b=10$	$\frac{1}{2}s-a=2$	$\cdots(\frac{1}{2}s-c)=0,9030900$
$c=7$	$\frac{1}{2}s-b=5$	$1,2041200$
$s=30$	$\frac{1}{2}s-c=8$	$log\,\frac{1}{2}s=1,1760913$
		$\cdots(\frac{1}{2}s-b)=0,6989700$
		$1,8750613$

1,2041200
1,8750613
0,3290587 — 1 = 1,3290587 — 2, mithin:

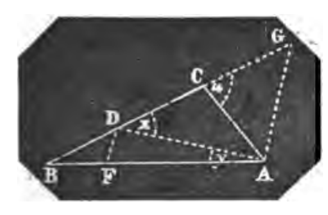
$log\,tg\frac{1}{2}B=9,6645293-10$, also $\frac{1}{2}B=24^0\,47'\,28'',6$ u. $B=49^0\,34'\,57,2$.

Eben so findet man die Winkel A und C aus:

$$tg\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{\frac{1}{2}s\cdot(\frac{1}{2}s-a)}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)}{\frac{1}{2}s\cdot(\frac{1}{2}s-c)}}$$

36.



Lehrsatz. In jedem Dreieck verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrer Differenz, wie die *tangente* von der halben Summe der gegenüber liegenden Winkel zur *tangente* von der halben Differenz derselben.

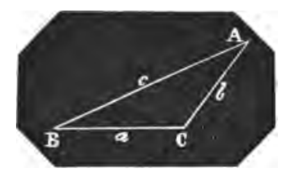
In Zeichen:

$$a+b:a-b=tg\frac{A+B}{2}:tg\frac{A-B}{2}$$

Beweis. Man verlängere die grössere Seite $BC=a$ um die kleinere $AC=b$, so dass $BG=a+b$. Ferner nehme man $CD=CA=b$, so dass $BD=a-b$ ist, ziehe AG und AD, dann ist Winkel DAG ein rechter. (Geometrie § 81.) Zieht man noch $DF \parallel GA$, so ist auch Winkel ADF ein rechter. Ferner ist nun der Aussenwinkel $u=A+B$ (indem $B\hat{A}C=A$ gesetzt); es ist aber auch $u=2x$ (weil $C\hat{A}D=x$), mithin: $x=\frac{A+B}{2}$, dann ist auch $x=y+B$, woraus $y=x-B$, oder $y=\frac{A+B}{2}-B$, d. i. $y=\frac{A-B}{2}$. Im rechtwinkligen Dreieck ADF ist nun $tg\,y=\frac{DF}{AD}\cdot\cdot$ (1) und in dem rechtwinkligen Dreiecke DAG ist $tg\,x=\frac{AG}{AD}\cdot\cdot$ (2). Die Division der beiden Gleichungen (1) und (2) giebt: $\frac{tg\,y}{tg\,x}=\frac{DF}{AG}$ oder (weil $\frac{DF}{AG}=\frac{BD}{BG}$ (Geometrie § 117)), auch $\frac{tg\,y}{tg\,x}=\frac{BD}{BG}$. Setzt man nun statt x, y, BD, BG, ihre Werthe, so folgt der obige Lehrsatz, nämlich:

$$\frac{tg\,\frac{A-B}{2}}{tg\,\frac{A+B}{2}}=\frac{a-b}{a+b}$$

37.



Aufgabe. Von einem Dreieck sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, z. B. $a=30500{,}67$; $b=21111{,}39$; $C=109^0\ 13'\ 48''$; man suche die übrigen Stücke.

Auflösung. Die Rechnung wird am leichtesten, wenn man erst die beiden andern Winkel A, B, und dann die dritte Seite sucht. Der eben bewiesene Satz (§ 36) giebt uns:

$$tg\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cdot tg\frac{A+B}{2}$$

Nach dieser Formel findet man, da $\frac{A+B}{2}$ bekannt ist, $\frac{A-B}{2}$ dann aus der halben Summe und halben Differenz, die Winkel A und B selbst. Es ist nämlich:

$\frac{A+B}{2}=90-\frac{1}{2}C=35^0\ 23'\ 6''$; $a+b=51612{,}06$; $a-b=9389{,}28$

$$\begin{aligned} log\, tg\frac{A+B}{2} &= 9{,}8514229-10 \\ \cdots\cdots (a-b) &= 3{,}9726323 \\ & \quad 3{,}8240552 \\ \cdots\cdots (a+b) &= 4{,}7127512 \\ \cdots tg\frac{A-B}{2} &= 9{,}1113040-10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{2}+\frac{B}{2} &= 35^0\ 23'\ 6'' \\ \frac{A}{2}-\frac{B}{2} &= \quad 7{,}21{,}45 \\ A &= 42^0 44' 51'' \\ B &= 28^0{,}1'{,}21'' \end{aligned}$$

Die Seite c findet man jetzt nach der *Sinus*-Regel:

$$\frac{c}{a}=\frac{sin\, C}{sin\, A}$$

$$c=\frac{a\, sin\, C}{sin\, A}$$

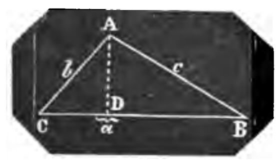
$$\begin{aligned} log\, sin\, C &= 9{,}9750658-10 \\ \cdots\cdots a &= 4{,}4843094 \\ & \quad 4{,}4593752 \\ log\, sin\, A &= 9{,}8317217-10 \\ \cdots\cdots c &= 4{,}6276535 \\ c &= 42428{,}08 \end{aligned}$$

Um noch den Flächeninhalt zu finden, denke man von A auf a das Perpendikel h gefällt, so ist $h=b\, sin\, C$, daher:

$$F=\tfrac{1}{2}ab\cdot sin\, C$$

$$F=303991970\,\square'$$

38.



Will man aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel *a*, *b*, C die übrigen Stücke ganz direct berechnen, so kann man auch das, aber die Formeln fallen für die numerische Rechnung sehr unbequem aus, weshalb man sie auch in der Regel nicht anwendet, sondern wie in § 37 verfährt.

1) Zur directen Bestimmung der Seite *c* folgt aus der *Cosinus*-Regel (§ 30), $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, indem man diese Formel auf *c* reducirt.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

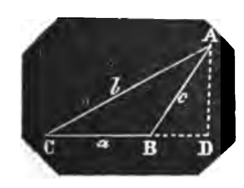
wobei aber das Vorzeichen von $\cos C$ zu berücksichtigen ist. Ist der Winkel C spitz, so wird das Product $2ab \cos C$ von $a^2 + b^2$ subtrahirt, dagegen aber addirt, wenn der Winkel C stumpf ist.

2) Zur Bestimmung des Winkels B hat man (das Perpendikel AD gefällt), $tg\,B = \frac{AD}{BD}$ oder, da $AD = b \sin C$ und $CD = b \cos C$, also $BD = a - b \cdot \cos C$

$$tg\,B = \frac{b \sin C}{a - b \cos C}$$

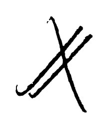
$$\text{oder: } \cot B = \frac{a - b \cos C}{b \sin C}$$

wobei wieder das Vorzeichen von $\cos C$ zu beachten ist. Wäre



der zu bestimmende Winkel B stumpf, so fällt das Perpendikel AD ausserhalb des Dreiecks. In diesem Fall ist dann $CD = b \cos C > a$ und deshalb in obigen Formeln die Grösse: $a - b \cos C = BD$, in sich negativ. Nimmt man aber, während der Rechnung, BD als positiv, so geben die obigen Formeln die *tang* und *cot* des Nebenwinkels, durch dessen Subtraction von 180° man den gesuchten stumpfen Winkel B hat. Damit also obige Formeln beide Fälle zugleich umfassen, dringt sich hier wieder die Nothwendigkeit auf, auch die Begriffe der *tangente* und *cotangente*

zu erweitern und auch auf stumpfe Winkel auszudehnen, so dass also die *tangenten* und ebenso die *cotangenten* zweier

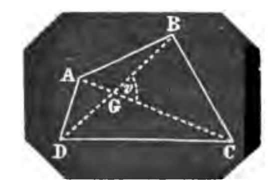


Nebenwinkel an Grösse vollkommen gleich, aber entgegengesetzt, nämlich von stumpfen Winkeln negativ sind. Es ist z. B. $tg\,120^0 = -(tg\,60^0)$; $cot\,120^0 = -(cot\,60)$ Allgemein, wenn a irgend einen Winkel bedeutet:

$$tg(180-a) = -(tg\,a)$$
$$cot(180-a) = -(cot\,a)$$

Und hiemit ist die eigentliche ebene Trigonometrie, welche nur die Regeln verlangte, aus gegebenen Bestimmungsstücken eines Dreiecks, die dadurch bestimmten, nicht durch Zeichnung, sondern durch Rechnung zu finden, vollständig entwickelt.

39.



Aufgabe. Es sind die beiden Diagonalen eines Vierecks gegeben $AC = d$, $BD = d'$, so wie der Winkel v, den sie mit einander bilden; man soll hieraus den Flächeninhalt des Vierecks bestimmen.

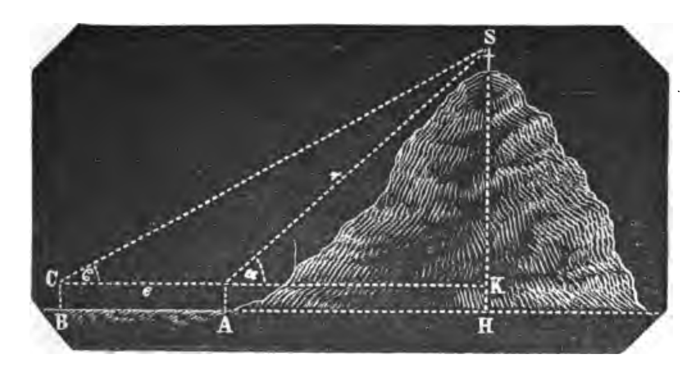
Auflösung. Denkt man von B und D auf $AC = d$ die Perpendikel p und p' gefällt, so ist erstlich $p = BG\ sin\ v$ und $p' = DG \cdot sin\ v$, mithin $F = \frac{1}{2} d \cdot \overline{BG}\ sin\ v + \frac{1}{2} d \cdot \overline{DG}\ sin\ v$ und hieraus, weil $BG + DG = d'$:

$$F = \tfrac{1}{2}\, dd'\, sin\ v$$

40a.

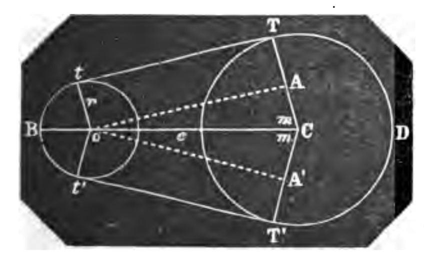
Aufgabe. Die Höhe $SH = h$ eines Thurmes (Berges) zu bestimmen.

Auflösung. Man messe zuerst eine horizontale Standlinie $\overline{AB} = e$, und dann mittelst eines Winkelmessers, dessen Limbus vertical gestellt werden kann die beiden Winkel α und β, dann ist der Winkel bei $S = \alpha - \beta$, und man hat zuerst aus:



$\frac{r}{e} = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$, $r = \frac{e \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$, dann $SK = r \sin \alpha = \frac{e \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$, wozu nun noch die Höhe BC des Instruments addirt werden muss

40 b.



Aufgabe. Es sind die Radien zweier Rollen gegeben, $R = 3'$, $r = 1'$, so wie der Abstand ihrer Mittelpuncte $e = 6'$. Man sucht die erforderliche Länge l eines darum zu legenden Riemens.

Auflösung. Weil der Riemen in den Endpuncten der beiden umschlungenen Bögen die Rollen berührt, so sind die Winkel bei T, t rechte. Zieht man $OA \parallel tT$, so ist $CA = R - r$ und man hat zur Bestimmung des unbekannten Winkels m:

$$\cos m = \frac{R - r}{e}, \text{ woraus}$$

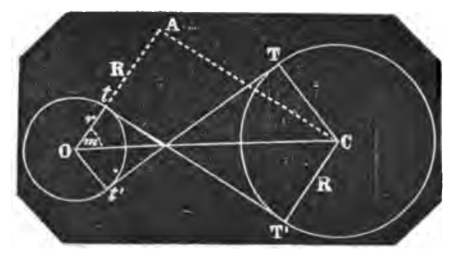
$$m = 70^0 31' 43'',6.$$

Da nun Winkel $tOB = m$, so ist der Bogen $tBt' = \frac{2m}{360} \cdot 2 r \pi$,

der Bogen $TDT' = \frac{360 - 2m}{360} \cdot 2R\pi$, ferner $Tt = OA = \sqrt{e^2 - (R-r)^2}$ oder auch: $Tt = e \cdot \sin m$, mithin:

$$l = 2e \cdot \sin m + \frac{m}{90} \cdot r\pi + \frac{180 - m}{90} \cdot R\pi$$

$$l = 25',24.$$



Findet eine Kreuzung des Riemens statt, so ist offenbar:

$$\cos m = \frac{R+r}{e}$$

$$m = 48^0 11' 23''$$

$$l = 2e \cdot \sin m + \frac{360 - 2m}{360} \cdot 2R\pi + \frac{360 - 2m}{360} \cdot 2r\pi$$

$$l = 2\sqrt{e^2 - (R+r)^2} + \frac{180 - m}{90}(R+r)\pi$$

$$l = 27',35$$

40 c.

Aufgabe. Die Erde, als Kugel betrachtet, sei der Umfang eines grössten Kreises (Aequators) = 5400 Meilen, mithin der Radius desselben $r = 859,436$ Meilen. (= 20284115 Fuss rhl.) und ein Bogen von einem Grade = 15 Meilen (1 Meile = 23601,6 Fuss rhl.). Wie lang ist hiernach die Sehne c eines Bogens von einem Grade und die mit der Sehne parallele, zwischen den verlängerten Radien enthaltene Tangente T dieses Bogens?

Auflösung. Man findet leicht:

$$c = 2r \sin 30' = 14,99981 \text{ Meilen}$$
$$T = 2r \operatorname{tg} 30' = 15,00038 \quad \text{„}$$

Es ist mithin die Sehne nur um 4½ Fuss kürzer und die Tangente nur um 9 Fuss länger, als der Bogen. Dies zeigt, dass man in vielen Fällen bedeutende Stücke von der Erdoberfläche als eben betrachten kann.

40 d.

Aufgabe. Wie gross ist der Radius r' eines Parallelkreises, dessen geographische Breite $b = 53^0$, und wie gross ist die Länge s eines Grades dieses Parallelkreises, wenn der Radius des Aequators $r = 859,436$ Meilen und ein Grad des Aequators = 15 Meilen?

Antwort. Man hat hier

$r' = r \cos b$ und dann:

$$s = \frac{2r\pi}{360} \cdot \cos b = 15 \cos b = 9,027 \text{ Meilen.}$$

Fünftes Buch.

Goniometrie.

41.

Jede mathematische Wissenschaft enthält schon in sich, und ohne dass die ersten Begründer derselben sie absichtlich hineingelegt hätten, die Keime zu einer neuen, und dies ist der Grund, weshalb die mathematischen Wissenschaften niemals zum eigentlichen Schlusse kommen, sondern immerfort wachsen. Der erste Begründer der Trigonometrie hatte die trigonometrischen Functionen *sin, cos,* etc. ursprünglich nur zu dem Zwecke berechnet, um durch ihre Vermittelung die in den beiden vorhergehenden Büchern aufgestellten trigonometrischen Probleme zu lösen, welches auch nach den dort gegebenen allgemeinen Regeln vollkommen geschehen ist.

Es konnte nun aber wohl nicht lange unbemerkt bleiben, dass unter den trigonom. Functionen eines oder auch mehrerer Winkel merkwürdige Beziehungen stattfinden, deren Kenntniss nicht allein die eigentliche Trigonometrie unterstützt und erleichtert, sondern auch in anderen, namentlich höhern Theilen der Mathematik, ja selbst bei rein arithmetischen Untersuchungen von grosser Wichtigkeit ist. Der Inbegriff dieser Beziehungen oder Formeln bildet für sich einen eigenen Theil der Trigonometrie, welchen man Goniometrie nennt, und wir wollen nun die practisch wichtigsten Sätze derselben, welche das Bedürfniss nach und nach zu entdecken genöthigt hat, hier erst einzeln mittheilen und sie dann, zur leichtern Uebersicht und Nach-

schlagung, in § 100 zusammenstellen. Um Gewandtheit in den vielfachen Anwendungen der Goniometrie zu erlangen, ist es durchaus erforderlich, die mit einem Sternchen bezeichneten Formeln auswendig zu wissen.

42.



Es sei ein stumpfer Winkel MCA, $=90+a$, dann ist, CM $=1$ gesetzt, MP $=\sin(90+a)$ (§ 6) und CP negativ genommen, $=\cos(90+a)$ (§ 32), da aber MP $=$ CQ und (für CM $=1$), CQ $=\cos a$, ferner CP $=$ MQ und MQ $=\sin a$, so haben wir hier die zwei in der Folge als Beweismittel dienenden kleinen Formeln:

$$\sin(90+a) = \cos a$$
$$\cos(90+a) = -\sin a$$

Anmerkung. Diese Formeln haben für den, der viel mit Zahlen rechnet, auch noch einen practischen Nutzen. Soll man nämlich zu einem stumpfen Winkel den *log sinus* oder *log cosinus* in den Tafeln aufschlagen, so kann man, anstatt den stumpfen Winkel erst von 180° zu subtrahiren, viel leichter 90° von dem Winkel subtrahiren und zu dem Reste die sinnverwandte Function suchen. Es ist z. B. $\sin 124^0\, 13'\, 24'' = \cos 34^0\, 13'\, 24''$ und $\cos 124^0\, 13'\, 24'' = -\sin 34^0\, 13'\, 24''$.

43.



Lehrsatz. Bedeutet a einen beliebigen Winkel, spitz oder stumpf, so finden unter seinen trigonometrischen Functionen folgende vier wichtige Beziehungen Statt. Es ist nämlich immer:*)

* 1) $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ * 3) $\dfrac{\sin a}{\cos a} = tg\, a$

* 2) $tg\, a \cdot \cot a = 1$ * 4) $\dfrac{\cos a}{\sin a} = \cot a$

---

*) Statt $\sin a . \sin a$ schreibt man $\sin^2 a$ oder $\sin a^2$.

Beweis. Es ist:

$$\sin a = \frac{MP}{CM}, \text{ also } \sin^2 a = \frac{\overline{MP}^2}{\overline{CM}^2} \ldots\ldots (1)$$

$$\cos a = \frac{CP}{CM}, \text{ also } \cos^2 a = \frac{\overline{CP}^2}{\overline{CM}^2} \ldots\ldots (2)$$

Beide Ausdrücke (1) und (2) addirt, kommt:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = \frac{\overline{MP}^2}{\overline{CM}^2} + \frac{\overline{CP}^2}{\overline{CM}^2} = \frac{\overline{MP}^2 + \overline{CP}^2}{\overline{CM}^2} = \frac{\overline{CM}^2}{\overline{CM}^2} = 1$$

Ferner: $\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{MP}{CM} : \frac{CP}{CM} = \frac{MP}{CP} = tg\, a$ (§ 2)

eben so: $\frac{\cos a}{\sin a} = \frac{CP}{CM} : \frac{MP}{CM} = \frac{CP}{MP} = \cot a$

Aus den beiden letztern Formeln $tg\, a = \frac{\sin a}{\cos a}$ und $\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$ folgt durch Multiplication derselben $tg\, a \cdot \cot a = \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\cos a}{\sin a} = 1$. Nimmt man CM $= 1$, so ist schon MP der *sinus* und CP der *cosinus* von a, und man kann dann die drei zuerst bewiesenen Formeln unmittelbar aus der Figur ablesen.

44.

Aufgabe. Aus einer trigonometrischen Function eines Winkels jede der drei übrigen zu berechnen.

Auflösung. Um zuerst den *sinus* durch den *cosinus* und umgekehrt auszudrücken, hat man unmittelbar aus Formel (1) (§ 43):

$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$; $\qquad \cos^2 a = 1 - \sin^2 a$

5, $\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a}$ $\qquad$ 6, $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a}$

Um den *sinus* und *cosinus* durch die *tangente* auszudrücken, hat man nun aus (§ 43, 3):

$$\frac{\sin a}{\cos a} = tg\,a \qquad \frac{\sin a}{\cos a} = tg\,a$$

$$\frac{\sin a}{\sqrt{(1-\sin^2 a)}} = tg\,a \qquad \frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a} = tg\,a$$

$$\frac{\sin^2 a}{1-\sin^2 a} = tg^2\,a \qquad \frac{1-\cos^2 a}{\cos^2 a} = tg^2\,a$$

$$\sin^2 a = (1-\sin^2 a)\,tg^2\,a \qquad 1-\cos^2 a = \cos^2 a \cdot tg^2\,a$$

$$\sin^2 a = tg^2\,a - \sin^2 a \cdot tg^2\,a \qquad 1 = \cos^2 a + \cos^2 a \cdot tg^2\,a$$

$$\sin^2 a + \sin^2 a\,tg^2\,a = tg^2\,a \qquad 1 = \cos^2 a.(1+tg^2\,a)$$

$$\sin^2 a \cdot (1+tg^2\,a) = tg^2\,a \qquad \cos^2 a = \frac{1}{1+tg^2\,a}$$

$$\sin^2 a = \frac{tg^2\,a}{1+tg^2\,a} \qquad 8,\ \cos a = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\,a}}$$

$$7,\ \sin a = \frac{tg\,a}{\sqrt{1+tg^2\,a}}$$

Aus $tg\,a \cdot cot\,a = 1$ (§ 43, 2) folgt $tg\,a = \frac{1}{cot\,a}$ und $cot\,a = \frac{1}{tg\,a}$. Es ist also einerlei, ob man mit $cot\,a$ multiplicirt oder mit $tg\,a$ dividirt und umgekehrt.

Um $\sin a$ und $\cos a$ durch $cot\,a$ auszudrücken, setze man in (7) und (8) $\frac{1}{cot\,a}$ statt $tg\,a$, so hat man:

$$\sin a = \frac{\frac{1}{cot\,a}}{\sqrt{1+\frac{1}{cot^2\,a}}} \qquad \cos a = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{cot^2\,a}}}$$

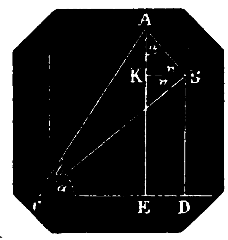
$$9,\ \sin a = \frac{1}{\sqrt{1+cot^2 a}} \qquad 10,\ \cos a = \frac{cot\,a}{\sqrt{1+cot^2 a}}$$

Aus 8 und 9 folgt noch:

$$11,\ \sqrt{1+tg^2\,a} = \frac{1}{\cos a}; \qquad 12,\ \sqrt{1+cot^2 a} = \frac{1}{\sin a}$$

from b to a' to a to (a + b)

45.



Aufgabe. Aus den *sinus* und *cosinus* zweier Winkel, a und b, den *sinus* und *cosinus* von der Summe beider Winkel zu finden.*)

Auflösung. Man lege die beiden Winkel a, b, deren Summe wir vorläufig noch kleiner als 90^0 annehmen, an einander, so dass $A\widehat{C}D = a + b$. Von A fälle man die beiden Perpendikel AB, AE und von B die beiden Perpendikel BD, BK, dann ist $B\widehat{A}K = B\widehat{C}D = a$ (denn $m = a$, als Wechs. Winkel, $m + n = 90^0$ und $B\widehat{A}K + n = 90^0$, also $B\widehat{A}K = m = a$). Aus dem bei B rechtwinkligen Dreieck ABC folgt:

$$\frac{AB}{AC} = \sin b \text{ und } \frac{BC}{AC} = \cos b, \text{ also:}$$

$$(1)\ AB = AC \cdot \sin b \text{ und } (2)\ BC = AC \cdot \cos b.$$

Aus dem bei K rechtwinkligen Dreieck ABK folgt: $\frac{AK}{AB} = \cos a$ und $\frac{BK}{AB} = \sin a$. In beide Ausdrücke den für AB gefundenen Werth substituirt, kommt: $\frac{AK}{AC \cdot \sin b} = \cos a$ und $\frac{BK}{AC \cdot \sin b} = \sin a$, hieraus:

$$\frac{AK}{AC} = \cos a \sin b \ldots\ldots (3) \qquad \frac{BK}{AC} = \sin a \sin b \ldots\ldots (4)$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD hat man: $\frac{BD}{BC} = \sin a$ und $\frac{CD}{BC} = \cos a$, oder für BC den Werth aus (2) gesetzt: $\frac{BD}{AC \cdot \cos b} = \sin a$, und $\frac{CD}{AC \cdot \cos b} = \cos a$. Hieraus:

$$\frac{BD}{AC} = \sin a \cdot \cos b \ldots\ldots (5) \qquad \frac{CD}{AC} = \cos a \cdot \cos b \ldots\ldots (6)$$

Addirt man die Gleichungen (3) und (5), so hat man:

$$\left(\text{weil } \frac{AK}{AC} + \frac{BD}{AC} = \frac{AK + BD}{AC} = \frac{AE}{AC} = \sin A\widehat{C}D = \sin(a + b)\right)$$

$$* \ (13)\ \sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

*) $\sin(a + b)$ ist nicht zu verwechseln mit $\sin a + \sin b$.

Subtrahirt man (4) von (6), so erhält man [weil $\frac{CD}{AC} - \frac{BK}{AC} = \frac{CD - BK}{AC} = \frac{CE}{AC} = \cos(a+b)$]:

/14 $$\text{(14)}\quad \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b.$$

46.

Um zu zeigen, dass die beiden oben gefundenen wichtigen Formeln:

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \ldots\ldots (1)$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \ldots\ldots (2)$$

auch für den Fall gelten, wo $a+b > 90$ ist, sei

1) $a = 90^0$, dann giebt die linke Seite der ersten Formel $\sin(90+b) = \cos b$ (§ 42); setzt man aber auf der rechten Seite auch $a = 90$, so giebt diese, weil $\sin 90 = 1$ und $\cos 90 = 0$ (§ 7), offenbar dasselbe, nämlich $\cos b$, wie es sein muss. Setzt man in der zweiten Formel $a = 90^0$, so geben beide Seiten dasselbe Resultat, nämlich:

$$\cos(90+b) = \cos 90 \cdot \cos b - \sin 90 \cdot \sin b$$
oder: $-\sin b = -\sin b$ (§ 42 und § 7).

2) Seien a und b beide spitz, aber $a+b > 90^0$. Setzt man nun $a = 90 - m$, $b = 90 - n$, mithin $a+b = 180 - (m+n)$, so ist $m+n < 90$. Substituirt man statt a und b ihre Ausdrücke, $90 - m$ und $90 - n$ in die erste Formel, so erhält man linker Hand: $\sin(180 - (m+n))$ oder $\sin(m+n)$ (§ 21). Auf der rechten Seite kommt:

$$\sin(90-m) \cdot \cos(90-n) + \cos(90-m)\sin(90-n)$$
$$= \cos m \cdot \sin n + \sin m \cdot \cos n \quad (\S\ 5).$$

Dies ist aber die Entwickelung von $\sin(m+n)$, wofür, weil $m+n < 90$, die Formel gültig ist. Beide Seiten geben also dasselbe Resultat. Die Substitution in die zweite Formel giebt auf der linken Seite (§ 32):

$$\cos[180 - (m+n)] = -\cos(m+n) = -(\cos m \cos n - \sin m \cdot \sin n)$$

Die rechte Seite giebt (§ 5) $\cos(90-m)\cdot\cos(90-n)$ $-\sin(90-m)\sin(90-n)=\sin m\cdot\sin n-\cos m\cdot\cos n$, also ganz dasselbe, wie auf der linken Seite. Linker Hand (Formel 2) ist $\cos(a+b)$ in sich negativ. Dies ist aber auch mit dem Betrage rechter Hand der Fall, weil für $a+b>90$ auch $\cos a\cdot\cos b<\sin a\cdot\sin b$

3. Sei $a>90$. Setze $a=90+m$, dann giebt die Substitution in die erste Formel:

$\sin(90+m+b)=\sin(90+m)\cos b+\cos(90+m)\sin b$, oder § 42:

$$\cos(m+b)=\cos m\cdot\cos b-\sin m\cdot\sin b$$

Die zweite Formel giebt für $a=90+m$:

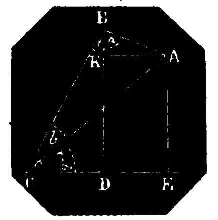
$\cos(90+m+b)=\cos(90+m)\cos b-\sin(90+m)\sin b$, oder § 42:

$$-\sin(m+b)=-\sin m\cdot\cos b-\cos m\cdot\sin b$$

$$\sin(m+b)=\sin m\cdot\cos b+\cos m\cdot\sin b$$

Wir erhalten also auch für $a>90$ auf beiden Seiten der Formel (1) und (2) dasselbe Resultat.

47.



Um die eben so wichtigen Formeln für die *sinus* und *cosinus* der Differenz zweier Winkel, $\sin(a-b)$ und $\cos(a-b)$, zu finden, sei $B\hat{C}E=a$ und $B\hat{C}A=b$, also $A\hat{C}E=a-b$, ferner AB senkrecht auf BC, und BD, AE senkrecht auf CE, sowie AK senkrecht auf BD, dann ist $A\hat{B}K+t=B\hat{C}D+t=90$, also $A\hat{B}K=B\hat{C}D=a$. Nun ist: $\frac{AB}{AC}=\sin b$ und $\frac{BC}{AC}=\cos b$, also:

$$(1)\ AB=AC\cdot\sin b \text{ und } (2)\ BC=AC\cdot\cos b$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD hat man:

$\frac{BD}{BC}=\sin a$ und $\frac{CD}{BC}=\cos a$, oder für BC seinen Werth aus (2) gesetzt $\frac{BD}{AC\cdot\cos b}=\sin a$ und $\frac{CD}{AC\cdot\cos b}=\cos a$, hieraus:

$$(3)\ \frac{BD}{AC}=\sin a\cos b \text{ und } (4)\ \frac{CD}{AC}=\cos a\cdot\cos b$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABK hat man: $\frac{BK}{AB}=\cos a$ und $\frac{AK}{AB}=\sin a$ oder für AB seinen Werth aus (1) gesetzt, $\frac{BK}{AC\cdot\sin b}=\cos a$ und $\frac{AK}{AC\cdot\sin b}=\sin a$, hieraus:

$$(5)\ \frac{BK}{AC}=\cos a\cdot\sin b \text{ und } (6)\ \frac{AK}{AC}=\sin a\cdot\sin b$$

Subtrahirt man die Gleichungen (3) und (5), so erhält man, weil $\frac{BD}{AC}-\frac{BK}{AC}=\frac{BD-BK}{AC}=\frac{AE}{AC}=\sin(a-b)$

$$\text{* } (15)\ \sin(a-b)=\sin a\cdot\cos b-\cos a\cdot\sin b$$

Addirt man die Gleichungen (4) und (6) und bemerkt, dass: $\frac{CD}{AC}+\frac{AK}{AC}=\frac{CD+AK}{AC}=\frac{CE}{AC}=\cos(a-b)$, so hat man:

$$\text{* } (16)\ \cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b$$

Die allgemeine Gültigkeit der beiden Formeln 15 und 16, für den Fall, dass a oder beide, a und b, >90 sind, wird wieder wie in § 46 bewiesen.

48.

Die übrigen Formeln der Goniometrie kann man nun alle, ohne eine Figur nöthig zu haben, aus den vorhergehenden ableiten. Dividirt man die Gleichungen 13 und 14 (§ 45) durch einander, so hat man:

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b}$$

Dividirt man rechter Hand Zähler und Nenner durch $cos\,a \cdot cos\,b$ und bemerkt, dass $\frac{sin\,a \cdot cos\,b}{cos\,a \cdot cos\,b} = \frac{sin\,a}{cos\,a} = tg\,a$, etc. (§ 43), so kommt:

$$* (17)\ tg(a+b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a \cdot tg\,b}\ ^{*)}$$

Auf gleiche Weise geben die Formeln 15 und 16 (§ 47):

$$* (18)\ tg(a-b) = \frac{tg\,a - tg\,b}{1 + tg\,a \cdot tg\,b}$$

49.

Setzt man in den drei Formeln:

$$sin(a+b) = sin\,a \cdot cos\,b + cos\,a \cdot sin\,b$$

$$cos(a+b) = cos\,a \cdot cos\,b - sin\,a \cdot sin\,b$$

$$tg(a+b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a \cdot tg\,b}.$$

$b = a$, so erhält man:

$$sin\,2a = 2\,sin\,a \cdot cos\,a$$

$$cos\,2a = cos^2 a - sin^2 a$$

$$tg\,2a = \frac{2\,tg\,a}{1 - tg^2 a}$$

oder auch, wenn man a statt $2a$, mithin $\frac{1}{2}a$ statt a setzt:

$$* (19)\ sin\,a = 2\,sin\,\tfrac{1}{2}a\,cos\,\tfrac{1}{2}a$$

$$(20)\ cos\,a = cos^2\,\tfrac{1}{2}a - sin^2\,\tfrac{1}{2}a$$

$$(21)\ tg\,a = \frac{2\,tg\,\tfrac{1}{2}a}{1 - tg^2\,\tfrac{1}{2}a}$$

*) Diese, so wie auch die folgenden Formeln, gelten natürlich so gut wie die, woraus sie abgeleitet, sowohl für stumpfe als spitze Winkel.

Setzt man $b=2a$, so erhält man:

$$\sin 3a = \sin a \cos 2a + \cos a \sin 2a$$

oder, weil $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$, und $\sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a$, auch:

$$\sin 3a = \sin a(1 - 2\sin^2 a) + \cos a \cdot 2\sin a \cdot \cos a$$

$$\sin 3a = \sin a - 2\sin^3 a + 2\sin a \cdot \cos^2 a$$

$$\sin 3a = \sin a - 2\sin^3 a + 2\sin a(1 - \sin^2 a)$$

22. (22) $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$.*)

50.

Es ist: $1 = \cos^2 \frac{1}{2}a + \sin^2 \frac{1}{2}a$ (§ 43, 1)

und $\cos a = \cos^2 \frac{1}{2}a - \sin^2 \frac{1}{2}a$ (§ 49, 20).

Die Addition und Subtraction dieser beiden Gleichungen geben folgende zwei wichtige Formeln:

23 * (23) $1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{1}{2}a$

24 * (24) $1 - \cos a = 2\sin^2 \frac{1}{2}a$.

Dividirt man (24) durch (23), so hat man:

$$tg^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{1-\cos a}{1+\cos a} = \frac{(1-\cos a)(1+\cos a)}{(1+\cos a)^2} = \frac{\sin^2 a}{(1+\cos a)^2}$$

und auch $tg^2 \frac{1}{2}a = \frac{1-\cos a}{1+\cos a} = \frac{(1-\cos a)^2}{(1+\cos a)(1-\cos a)} = \frac{(1-\cos a)^2}{\sin^2 a}$

25 (25) $tg \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = \frac{\sin a}{1+\cos a} = \frac{1-\cos a}{\sin a}$

---

*) Die Ableitung der Formeln, welche die *sinus* und *cosinus* von höhern Vielfachen eines Winkels durch Potenzen dieser Functionen und umgekehrt ausdrücken, gehört in die höhere Analysis.

51.

Setzt man in den Formeln 13, 14, 15, 16, 17, 18, §§ 45, 47, 48, $a = 45^0$, und beachtet, dass $\sin 45 = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $tg\, 45 = 1$, so hat man:

$$(26) \quad \sin(45 + b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos b + \sin b)$$

$$(27) \quad \sin(45 - b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos b - \sin b)$$

$$(28) \quad \cos(45 + b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos b - \sin b)$$

$$(29) \quad \cos(45 - b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos b + \sin b)$$

$$(30) \quad tg\,(45 + b) = \frac{1 + tg\, b}{1 - tg\, b}$$

$$(31) \quad tg\,(45 - b) = \frac{1 - tg\, b}{1 + tg\, b}$$

Aus den vier erstern Formeln folgt, dass:

$$(32) \quad \sin(45 + b) = \cos(45 - b)$$

$$(33) \quad \cos(45 + b) = \sin(45 - b).$$

52.

Durch Addition und Subtraction der beiden Gleichungen:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a . \sin b$$

erhält man:

$$(34) \quad \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cdot \cos b$$

$$(35) \quad \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a . \sin b$$

oder, indem man $a + b = p$ und $a - b = q$, folglich $a = \frac{p+q}{2}$ und $b = \frac{p-q}{2}$ setzt:

$$(36) \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} . \cos \frac{p-q}{2}$$

$$(37) \quad \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} . \sin \frac{p-q}{2}$$

Durch Addition und Subtraction der beiden Gleichungen:

$$\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b$$

erhält man:

$$(38)\quad \cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cdot\cos b$$

$$(39)\quad \cos(a-b)-\cos(a+b)=2\sin a\cdot\sin b$$

oder, indem man wieder $a+b=p$ und $a-b=q$ setzt:

$$(40)\quad \cos p+\cos q=2\cdot\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$(41)\quad \cos q-\cos p=2\cdot\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$

Durch diese vier wichtigen Formeln: 36, 37, 40, 41 kann man also die Summen und Differenzen zweier *sinus* oder *cosinus* in Producte verwandeln. Dividirt man noch (37) durch (36), so erhält man:

$$\frac{\sin p-\sin q}{\sin p+\sin q}=\frac{\cos\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}}{\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}}$$

oder indem man rechter Hand Zähler und Nenner durch $\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$ dividirt:

$$(42)\quad \frac{\sin p-\sin q}{\sin p+\sin q}=\frac{tg\frac{p-q}{2}}{tg\frac{p+q}{2}}$$

53.

Setzt man in (36) und (37), $p=90^\circ$, so ist:

$$(43)\quad 1+\sin q=2\sin(45+\tfrac{1}{2}q)\cos(45-\tfrac{1}{2}q)=2\sin^2(45+\tfrac{1}{2}q)\ (32)$$

$$(44)\quad 1-\sin q=2\cos(45+\tfrac{1}{2}q)\sin(45-\tfrac{1}{2}q)=2\cos^2(45+\tfrac{1}{2}q)$$

Dividirt man (24) durch (20), so kommt:

$$\frac{1-\cos a}{\cos a}=\frac{2\sin^2\frac{1}{2}a}{\cos^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}a}\text{ oder:}$$

$$\frac{1-\cos a}{\cos a}=\frac{2\,tg^2\frac{1}{2}a}{1-tg^2\frac{1}{2}a}=\frac{2\,tg\frac{1}{2}a}{1-tg^2\frac{1}{2}a}\cdot tg\tfrac{1}{2}a$$

$$(45)\quad \frac{1-\cos a}{\cos a}=tg\,a\cdot tg\tfrac{1}{2}a\quad(21)$$

$$(46)\quad tg\,a\pm tg\,b=\frac{\sin a}{\cos a}\pm\frac{\sin b}{\cos b}=\frac{\sin(a\pm b)}{\cos a\cdot\cos b}$$

Durch ähnliche Combinationen könnte man solcher goniometrischen Formeln leicht noch mehrere finden, wir glauben jedoch an vorstehenden vollkommen genug zu haben.

	sin	cos	tg.	cot
z	+ sin z	+ cos z	+ tg z	+ cot z
90 + z	+ sin z	- cos z	- tg z	- cot z
180 + z	- sin z	- cos z	+ tg z	+ cot z
270 + z	- sin z	+ cos z	- tg z	- cot z

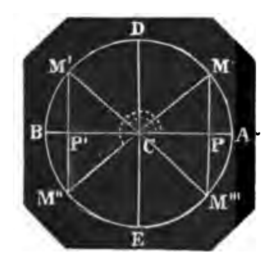
Sechstes Buch.

Ausdehnung der Begriffe *sinus*, *cosinus* etc. auf überstumpfe und negative Winkel.

54.

Die vielfache Anwendung, welche die Goniometrie in der höheren und angewandten Mathematik findet, hat es nothwendig gemacht, die Begriffe der trigonometrischen Functionen auch auf überstumpfe Winkel oder eigentlich auf beliebig grosse Kreisbögen, ja selbst auf mehrere ganze Umläufe eines Kreises auszudehnen, und obgleich wir hier, so wie im Vorhergehenden, (§§ 21, 30) die Nothwendigkeit dieser Begriffserweiterung nach und nach herbeiführen und fühlbar machen könnten und beim mündlichen Unterricht auch thun würden, so können und wollen wir hier doch, Kürze halber, die bisher befolgte heuristische Methode verlassen, weil der Anfänger jetzt darauf vorbereitet ist, und wir an geeigneter Stelle auf die Nothwendigkeit der Begriffserweiterung aufmerksam machen werden.

55.



Es seien zur vorläufigen Festsetzung der Begriffe die beiden Durchmesser AB, DE senkrecht auf einander und von dem Endpunct M des Bogens AM das Perpendikel MP auf AB gefällt, so ist, wenn man den *radius* CM = 1 setzt, wie bereits bekannt, MP der *sinus* und CP der *cosinus* des Bogens AM oder des Winkels MCA.

Erstreckt sich der Bogen AM bis M', im zweiten Quadranten, so ist, wie ebenfalls schon bekannt, das Perpendikel M'P' der *sinus* und CP', negativ genommen, der *cosinus* des Bogens AM' oder des stumpfen Winkels M'CP.

Erstreckt sich der Bogen AM noch weiter bis M'', im dritten Quadranten, so heisst wiederum das vom Endpunct M'' auf den Durchmesser AB gefällte Perpendikel M''P' der *sinus* und CP' der *cosinus* des Bogens $\widehat{ADM}''$ und beide, *sinus* und *cosinus* dieses Bogens ADM'' müssen, um dem Zwecke dieser Begriffserweiterung zu entsprechen, als negativ angesehen werden, wie wir § 61 nachweisen wollen. Uebrigens ist klar, dass sowohl der *sinus* als *cosinus* dieses Bogens ADM'' dem *sinus* und *cosinus* von Bogen M''B oder vom spitzen Winkel M''CB (Ueberschuss über 180°) an Grösse vollkommen gleich und nur entgegengesetzt sind, so dass z. B. $\sin 240^0 = -\sin 60^0$ und $\cos 240^0 = -\cos 60^0$, $\sin(180+a) = -\sin a$; $\cos(180+a) = -\cos a$.

Erstreckt sich der Bogen ADM'' bis in den vierten Quadranten nach M''', so heisst wiederum das vom Endpunct M''' auf den Durchmesser AB gefällte Perpendikel M'''P, negativ genommen, der *sinus* und CP, positiv genommen, der *cosinus* des Bogens ADM''', und beide sind an Grösse gleich dem *sinus* und *cosinus* vom Winkel ACM''', so dass z. B. $\sin 320^0 = -\sin(360-320) = -\sin 40$ und $\cos 320 = \cos 40$, oder auch so geschrieben: $\sin(3\cdot 90+a) = -\cos a$ und $\cos(3\cdot 90+a) = \sin a$.

Wächst endlich der Bogen oder Winkel über eine ganze Umdrehung (über 360°), so wiederholen sich die vorhergehenden Werthe sammt ihren Vorzeichen, so dass allgemein: $\sin(360+a) = \sin a$, und $\cos(360+\cos a) = \cos a$, so wie auch wenn (für mehrere ganze Umdrehungen) n eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

$$\sin(n\cdot 360+a) = \sin a \text{ und } \cos(n\; 360+a) = \cos a$$

56.

Hiernach sind also oberhalb des Durchmessers AB, nämlich im ersten und zweiten Quadranten die *sinus* immer positiv, in entgegengesetzter Lage, nämlich unterhalb des Durchmessers AB aber, also im dritten und vierten Quadranten negativ. Die *cosinus* sind im ersten und vierten Quadranten positiv, in entgegengesetzter Lage, auf der anderen Seite des Durchmessers DE, also im zweiten und dritten Quadranten negativ. Und folglich sind auch, wenn man beachtet, dass $\frac{\sin a}{\cos a} = tg\, a$, $\frac{\cos a}{\sin a} = \cot a$ (§ 43) und dass gleiche Vorzeichen einen positiven, ungleiche aber einen negativen Quotienten geben, die *tangenten* und *cotangenten* im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweiten und vierten aber negativ.

57.

Betrachtet man die Drehung von A über D, z. B. den Bogen AM oder Winkel MCA als positiv, so kann man die Drehung im entgegengesetzten Sinne von A rückwärts nach E, z. B. den Bogen AM''' oder Winkel M'''CA als negativ betrachten. Sind beide entgegengesetzte Drehungen gleich gross, so haben sie nach dem, was § 56 festgesetzt worden, gleich grosse, jedoch entgegengesetzte *sinus*, aber völlig gleiche *cosinus*. Allgemein: *)

$$\sin(-a) = -\sin(+a);\ \cos(-a) = \cos(+a).$$

58.

Wächst der Bogen AM (oder Winkel MCP) von 0 bis 90°, so wächst offenbar (CM = 1 gesetzt) der *sinus* gleichzeitig

*) Es ist also auch $\cos(a - b) = \cos(b - a)$; und $\sin(a - b) = -\sin(b - a)$.

von 0 bis DC = 1, der *cosinus* dagegen nimmt ab von CA = 1 bis 0.

Wächst der Bogen von 90 bis 180°, so nimmt sein *sinus* wieder ab, von DC = 1 bis 0, der *cosinus* aber wächst im negativen Sinne von 0 bis CB = — 1.

Wächst der Bogen von 180 bis 3·90 = 270°, so wächst wieder der *sinus* im negativen Sinne von 0 bis CE = — 1, der *cosinus* aber nimmt ab von CB = — 1 bis 0.

Wächst der Bogen endlich von 270 bis 360°, so nimmt der *sinus* ab, von CE = — 1 bis 0, der *cosinus* dagegen wächst von 0 bis CA = 1, so dass also:

$$\begin{array}{ll} \sin 0^0 = 0 & \cos 0^0 = 1 \\ \sin 90^0 = 1 & \cos 90^0 = 0 \\ \sin 180^0 = 0 & \cos 180^0 = -1 \\ \sin 270^0 = -1 & \cos 270^0 = 0 \\ \sin 360^0 = 0 & \cos 360^0 = 1 \end{array}$$

59.

Ist der *radius* eines Kreises = 1, so ist der ganze Umfang, oder ein Bogen von 360°, $= 2\pi$, der halbe Umfang, oder ein Bogen von 180°, $= \pi$, ein Quadrant oder Bogen von 90°, $= \frac{\pi}{2}$ etc. Man pflegt deshalb vorstehende Ausdrücke auch wohl so zu schreiben: (Vergl. § 62 a.)

$$\begin{array}{ll} \sin \frac{\pi}{2} = 1 & \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sin \pi = 0 & \cos \pi = -1 \\ \sin \frac{3\pi}{2} = -1 & \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \\ \sin 2\pi = 0 & \cos 2\pi = 1 \end{array}$$

Zufolge der § 55 festgesetzten Begriffe ist $\sin 360 = \sin 2 \cdot 360 = \sin 3 \cdot 360^0$ etc. $= 0$, oder $\sin 1 \cdot 2\pi = \sin 2 \cdot 2\pi = \sin 3 \cdot 2\pi$ etc. $= 0$ oder allgemein, wenn k eine beliebige ganze Zahl (0, 1, 2, 3....) bedeutet, so stellt $2k\pi$ alle Bögen dar, deren *sinus* = 0 und deren *cosinus* = 1. Eben so stellt $(2k + 1)\pi$ alle Bögen dar,

deren *sinus* wieder $=0$, deren *cosinus* aber $=-1$. Daher:

$$\sin 2k\pi = 0 \qquad \cos 2k\pi = 1$$
$$\sin(2k+1)\pi = 0 \qquad \cos(2k+1)\pi = -1$$

60.

Jetzt bleibt uns noch zu beweisen übrig, dass die im Vorhergehenden aufgeführten und § 100 zusammengestellten Formeln, welche bisher nur für Winkel < 180 bewiesen sind, auch für diese Begriffserweiterung der trigonometrischen Functionen allgemein gültig sind, so wie auch, weshalb für Bögen oder Winkel über 180^0 die trigonometrischen Functionen die § 55 vorläufig festgesetzten Vorzeichen, der allgemeinen Gültigkeit der Formeln halber, nothwendig erhalten müssen.

61.

Dass die ersten acht Formeln (§ 100) für alle noch so grosse Bögen gelten, ist, mit Berücksichtigung der Vorzeichen, klar, es frägt sich also nur, ob auch die Fundamentalformeln (9) und (10) allgemein gültig sind. Dass diese beiden Formeln, nämlich:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \ldots\ldots. (1)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \ldots\ldots. (2)$$

für $a+b>90$ gelten, ist bereits § 46 bewiesen.

Es seien nun beide Winkel a und b stumpf, folglich $a+b>180^0$, aber noch $a+b<270^0$, und wir müssen nun zeigen, dass die rechten Seiten beider Formeln ganz dasselbe geben, wie die linken Seiten, indem wir den *sinus* und *cosinus* von dem überstumpfen Winkel $a+b$ an Grösse und Vorzeichen so nehmen, wie in § 55 festgesetzt worden.

Man setze $a = 90 + p$ und $b = 90 + q$ (wo p und q spitze Winkel sind und auch $p + q < 90$), so giebt die Substitution von $90 + p$ und $90 + q$ in die erste Formel:

$$sin(180 + p + q) = sin(90 + p) \cdot cos(90 + q) + cos(90 + p) \cdot sin(90 + q)$$

Aus dieser Gleichung folgt aber, vermöge §§ 55 und 42:

$$-sin(p + q) = -cos\,p \cdot sin\,q - sin\,p \cdot cos\,q,$$
$$-sin(p + q) = -(sin\,p \cdot cos\,q + cos\,p \cdot sin\,q) \qquad (13)$$

was also vollkommen stimmt und zugleich, wenn man die erste Formel auf überstumpfe Winkel ausdehnen will, die Nothwendigkeit zeigt, den *sinus* eines solchen Winkels als negativ zu nehmen, weil die rechte Seite der ersten Formel ein negatives Resultat giebt.

Dieselbe Substitution in die zweite Gleichung giebt:

$$cos(180 + p + q) = cos(90 + p)\,cos(90 + q) - sin(90 + p)\,sin(90 + q)$$

hieraus, zufolge §§ 55 und 42:

$$-cos(p + q) = + sin\,p \cdot sin\,q - cos\,p \cdot cos\,q$$
$$-cos(p + q) = -(cos\,p \cdot cos\,q - sin\,p \cdot sin\,q) \qquad (14)$$

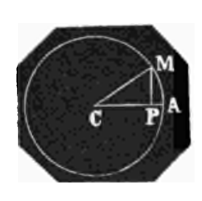
was also wieder vollkommen stimmt.

Eben so beweis't man die Gültigkeit der beiden Grundformeln für die Fälle, wo 1, a stumpf und $b = 90^0$, 2, a stumpf und b spitz ist, indem man beide mal $90 + p$ für a substituirt.

Sind endlich a und b stumpf und $a + b > 270^0$, so setze $a = 180 - p$, $b = 180 - q$ und beachte, dass $sin(360 - (p + q)) = -sin(p + q)$; $cos(360 - (p + q)) = cos(p + q)$ und $sin(180 - p) = sin\,p$; $cos(180 - p) = -cos\,p$. Die übrigen besondern Fälle sind hiernach leicht zu behandeln, so wie auch die beiden Formeln für $sin(a - b)$ und $cos(a - b)$, für den Fall, wo a und b beliebig gross, oder auch $b > a$ ist.

62 a.

* In der höhern Mathematik werden die Winkel, statt durch Grade, in der Regel durch die Längen der, immer mit einem Radius $=1$, zwischen ihren Schenkeln beschriebenen Bögen ausgedrückt. So ist z. B. für CM $=1$ der ganze Umfang $=2\pi=6{,}28318\cdots\cdots\cdots$, und ein Bogen, AM, von 30^0 z. B. wäre in Länge (oder, wie es in der Kunstsprache heisst, in Theilen des Halbmessers) ausgedrückt, $=2\pi\cdot\frac{30}{360}=0{,}523\cdots$, d. h. denkt man die Einheit (den Halbmesser) in 1000 gleiche Theile getheilt, so kommen auf die Länge eines Bogens von 30^0 etwas über 523 solcher Theile. Statt $\sin 30^0=\frac{1}{2}$ kann man also auch schreiben: $\sin 0{,}523\cdots=\frac{1}{2}$. (Soll jedoch die trigonometrische Function eines in Theilen des Halbmessers gegebenen Bogens, z. B. $\sin 0{,}523\cdots$, mit Hülfe der Tafeln aufgeschlagen werden, so muss man den Bogen erst in Grade verwandeln: also $\sin 0{,}5236\cdots=\sin\frac{0{,}5236\cdots}{2\pi}\cdot 360^0=\sin 30^0$.)



Um anzudeuten, dass ein Winkel (*angulus*) oder Bogen (*arcus*) genommen werden soll, der zu einer numerisch gegebenen trigonometrischen Function gehört, dessen *sinus* z. B. $=\frac{1}{2}$ ist, schreibt man so: $ang(\sin=\frac{1}{2})$; $arc(\sin=\frac{1}{2})$ oder kürzer: $arc\,\sin\frac{1}{2}$.

Da $\sin 30^0=\frac{1}{2}$ ist, so ist umgekehrt $ang\,\sin\frac{1}{2}=30^0$,*) eben so $arc\,\sin\frac{1}{2}=0{,}5236\cdots\cdot$ Eben so bedeutet $arc\,\cos\frac{1}{2}$ einen mit dem *radius* $=1$ beschriebenen Bogen, dessen *cosinus* $=\frac{1}{2}$ etc. Um anzudeuten, dass ein mit dem *radius* $=r$ beschriebener Bogen genommen werden soll, dessen *cosinus* $=\frac{1}{2}$ ist, schreibt man also $r\cdot arc\,\cos\frac{1}{2}$.

62 b.

* Ist der *sinus* eines Bogens, a, $=x$, so ist der *cosinus* desselben Bogens a, $=\sqrt{1-x^2}$ (§ 44). Ist ferner die *cotangente* eines

*) Zu einer trigonometrischen Function gehören zwar unzählig viele Winkel (Bögen). Ohne besondere Veranlassung nimmt man aber immer den kleinsten.

Bogens, a, $= x$, so ist die *tangente* desselben Bogens a, $= \frac{1}{x}$ (weil $tg\ a = \frac{1}{cot\ a}$, § 43, 2).

Es ist mithin auch:

$$arc\,(sin = x) = arc\,(cos = \sqrt{1-x^2})$$
$$arc\,(cot = x) = arc\left(tg = \frac{1}{x}\right)$$

Da nun ferner:

$$sin\ arc\,(sin = x) = x \text{ und:}$$
$$sin\ arc\,(cos = x) = sin\ arc\,(sin = \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2}$$
$$cot\ arc\,(tg = x) = cot\ arc\left(cot = \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$$

so erhellt auch die Richtigkeit folgender Formel, nach welcher man zwei, durch ihre trigonometrischen Functionen bestimmte Bögen addiren (subtrahiren) kann. Es ist nämlich:

$$arc\ sin\ x + arc\ sin\ y = arc\ sin\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

denn, beiderseits die *sinus* genommen, hat man, rechter Hand:

$$sin\ arc\ sin\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

und linker Hand, zufolge § 45, 13:

$$sin\,(arc\ sin\ x + arc\ sin\ y) = sin\ arc\ sin\ x \cdot cos\ arc\ sin\ y + cos\ arc\ sin\ x \cdot sin\ arc\ sin\ y$$

d. i. $$sin\,(arc\ sin\ x + arc\ sin\ y) = x \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-x^2}$$

also auf beiden Seiten gleich.

Eben so findet man:

$$arc\ cos\ x + arc\ cos\ y = arc\ cos\,(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})$$
$$arc\ tg\ x + arc\ tg\ y = arc\ tg\,\frac{x+y}{1-xy}$$
$$2 arc\ tg\ x = arc\ tg\ x + arc\ tg\ x = arc\ tg\,\frac{2x}{1-x^2}$$

62 c.

* Drückt man die mit einem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Bögen statt in Secunden in Längen (in Theilen des Halbmessers)

aus, so zeigt sich, wie auch schon aus der unmittelbaren Betrachtung des Kreises folgt, dass die *sinus* zwar immer kleiner und die *tangenten* immer grösser, als die zugehörigen Bögen sind, innerhalb eines kleinen Intervalls aber, etwa von 0″ bis 100″, der Unterschied aller drei so gering ist, dass er erst in der achten Decimale sich zeigt, und dass man deshalb, innerhalb dieser Grenzen, statt der *sinus* (*tangenten*) die Bögen selbst (in Theilen des Halbmessers ausgedrückt) setzen kann, so wie auch das Verhältniss zweier solcher kleinen *sinus* durch das Verhältniss ihrer Bögen, gleichviel, ob in Längen oder in Secunden ausgedrückt, darstellen kann. So ist z. B.:

$$\text{Bogen von } 1'' = \frac{3{,}1415926}{180 \cdot 60 \cdot 60}$$

$$\log arc\ 1'' = 4{,}6855749 - 10$$

$$\log sin\ 1'' = 4{,}6855749 - 10$$

$$\log sin\ 10'' = 5{,}6855749 - 10$$

$$\log sin\ 30'' = 6{,}1626961 - 10$$

$$arc\ 1'' = sin\ 1'' = 0{,}000004848137 \cdots$$

$$sin\ 10'' = 0{,}00004848137 \cdots$$

$$sin\ 30'' = 0{,}0001454441 \cdots$$

$$\frac{sin\ 30''}{sin\ 10''} = \frac{0{,}000145 \cdots}{0{,}000048 \cdots} = \frac{30''}{10''} = 3$$

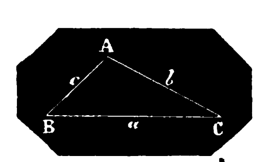
Da die Längen der Bögen der Anzahl ihrer Secunden proportional sind, so erhält man die Länge eines mit dem Halbmesser = 1 beschriebenen und in Graden etc. gegebenen Bogens, indem man ihn erst auf Secunden reducirt und die erhaltene Anzahl mit *arc* 1″ oder *sin* 1″ multiplicirt. So ist z. B. der mit dem Halbmesser = 1 beschriebene Bogen von 30° in Länge = $30 \cdot 60 \cdot 60 \cdot sin 1''$, mithin = $108000 \cdot 0{,}000004848137 \cdots = 0{,}523598796$.

Umgekehrt wird also ein in Theilen des Halbmessers = 1 gegebener Bogen in Secunden ausgedrückt, indem man ihn durch *sin* 1″ dividirt oder mit $\frac{1}{sin\ 1''} = \frac{1}{0{,}000004848137} = 206265$ multiplicirt. So viel Secunden, nämlich 206265″ = 57° 17′ 44″,8, kommen also auf einen Bogen, dessen Länge = 1, gleich dem *radius* ist.

Siebentes Buch.

Anwendungen der Goniometrie.

63 a.



Die §§ 35 und 36 aus der Figur abgeleiteten Formeln hätte man, unter Voranstellung der Goniometrie, folgendermassen etwas kürzer ableiten können, was jedoch dem Anfänger nicht so klar geworden sein würde.

Um aus drei Seiten eines Dreiecks einen Winkel, z. B. B zu finden, ist nach § 30:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \text{ hieraus (§ 50):}$$

$$1 - \cos B = 1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad 1 + \cos B = 1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

(24) $$2\sin^2 \tfrac{1}{2}B = \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2ac} \qquad 2\cos^2 \tfrac{1}{2}B = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$ (23)

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2}B = \frac{b^2 - (a-c)^2}{2ac} \qquad 2\cos^2 \tfrac{1}{2}B = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2ac}$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}B = \frac{(b+a-c)(b+c-a)}{4ac} \qquad \cos^2 \tfrac{1}{2}B = \frac{(a+c+b)(a+c-b)}{4ac}$$

$$\sin \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{4ac}} \qquad \cos \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+c-b)}{4ac}}$$

Beide Gleichungen durch einander dividirt:

$$tg \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{(a+b+c)(a+c-b)}}$$

$$tg \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(\tfrac{1}{2}s - a)(\tfrac{1}{2}s - c)}{\tfrac{1}{2}s \cdot (\tfrac{1}{2}s - b)}} \text{*)}$$

*) Wenn der *sinus* oder *cosinus* eines Winkels nahe = 1 ist, so ändern sich diese beiden Functionen mit dem Wachsen des Winkels sehr langsam,

Um aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel a, b, C, die beiden andern Winkel A und B zu finden, hat man nach § 27:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \text{ hieraus:}$$

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{\sin A}{\sin B} - 1 \text{ und } \frac{a}{b} + 1 = \frac{\sin A}{\sin B} + 1$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin B}; \quad \frac{a+b}{b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin B}$$

Beide Gleichungen durch einander dividirt, kommt:

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{a-b}{a+b} \text{ oder § 52,}$$

$$\frac{tg\,\frac{1}{2}(A-B)}{tg\,\frac{1}{2}(A+B)} = \frac{a-b}{a+b} \text{ (wie in § 36).}$$

63 b.

Aufgabe. Die Höhe eines Leuchtthurmlichtes, L, über dem Niveau des Meeres ist $= h = 200'$. Aus welcher Entfernung, e, kann es erblickt werden, wenn die Höhe des Auges A über demselben Niveau $= h' = 12'$?

Antwort. Es kann nicht eher erblickt werden, als bis das Auge A in die Verlängerung der vom Puncte L an die Erde gezogenen Berührungslinie tritt. Verbindet man also die Puncte L, A und den Berührungspunct T mit dem Mittelpunct C, setzt $L\widehat{C}T = \alpha$ und $A\widehat{C}T = \beta$, so hat man:

$$\cos\alpha = \frac{r}{r+h} \text{ und } \cos\beta = \frac{r}{r+h'}$$

oder, weil bei dieser Art Aufgaben die Winkel α und β immer sehr klein sind, so erhält man nach §§ 63 a Randanmerkung und 50 (24) genauer:

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h}{r+h}} \text{ und } \sin\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h'}{r+h'}}$$

Aus den Winkeln α und β findet man dann leicht die zu-

---

wie die unmittelbare Betrachtung des Kreises oder auch die in den Tafeln ausgesetzten Differenzen zeigen. Wenn man also die Wahl hat, einen Winkel durch eine beliebige trigonometrische Function zu bestimmen, so wählt man immer die, welche die grössten Differenzen hat, weil hier ein Fehler von ein paar Einheiten in der letzten Stelle des Logarithmen keinen grossen Einfluss auf den dazu aufzuschlagenden Winkel übt. Die *tangenten* haben immer die grössten Differenzen und bestimmen die Winkel also am genauesten.

gehörigen Bögen, oder wenn ihre Summe der Länge der Tangente AL gleich gesetzt werden kann (§ 40 c), gleich einfacher:

$$e = \sqrt{2rh + h^2} + \sqrt{2rh' + h'^2}, \text{ oder genau genug:}$$

$$e = \sqrt{2rh} + \sqrt{2rh'}$$

$$e = 112140' = 4{,}7 \text{ Meilen.}$$

Aufgabe. Wie gross ist die Fläche F der Erdzone von $\mathfrak{B} = 23\frac{1}{2}^0$ bis $\mathfrak{B}' = 66\frac{1}{2}^0$ der geographischen Breite? (Der Radius der Erde $r = 859{,}436$ Meilen.)

Antwort. Es ist die Höhe der Zone $= r \sin \mathfrak{B}' - r \sin \mathfrak{B}$ und folglich (Geometrie § 178) $F = 2r^2\pi(\sin \mathfrak{B}' - \sin \mathfrak{B})$, oder: § 52, 37

$$F = 4r^2\pi \cos \frac{\mathfrak{B}' + \mathfrak{B}}{2} \cdot \sin \frac{\mathfrak{B}' - \mathfrak{B}}{2}$$

$$F = 2405456 \,\square \text{ Meilen.}$$

64.

Hülfswinkel. Weil die *tangenten* und *cotangenten* immer zwischen 0 und ∞ enthalten, die *sinus* und *cosinus* aber immer ächte Brüche sind, so ist klar, dass man jede gegebene, noch so kleine oder grosse Zahl als *tangente* oder *cotangente* und jeden ächten Bruch immer als *sinus* oder *cosinus* eines, mit Hülfe der Tafeln leicht zu bestimmenden Winkels betrachten kann. Soll z. B. der Winkel m gefunden werden, dessen *tangente* $= 5\frac{3}{4} = 5{,}75$ ist, so hat man:

$$tg\, m = 5{,}75$$
$$\log tg\, m = 10{,}7596678 - 10$$
$$m = 80^0\, 8'\, 3''$$

Soll $\frac{5}{8} = 0{,}625$ der *sinus* eines Winkels n sein, so ist:

$$\sin n = 0{,}625$$
$$\log \sin n = 9{,}7958800 - 10$$
$$n = 38^0\, 40'\, 56''$$

Dies vorausgeschickt, wollen wir jetzt an einem leichten Beispiel zeigen, wie man durch Vermittelung eines sogenannten Hülfswinkels, den man in die Rechnung einführt, verwickelte Ausdrücke oftmals bedeutend vereinfachen kann.

Angenommen, es sei gegeben $a = 506835$, $b = 279041$, und es soll $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ berechnet werden. Die unmittelbare Rechnung würde hier zehn Operationen erfordern. Kürzer verfährt man so: Es ist:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)} \text{ oder:}$$

$$x = a\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)}$$

Betrachtet man hier nun $\frac{b}{a}$ als *tangente* eines leicht zu bestimmenden Winkels m, so dass $tg\,m = \frac{b}{a}$, und setzt also $tg^2 m$ statt $\frac{b^2}{a^2}$, so ist:

$$x = a\sqrt{1 + tg^2 m} = a\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 m}\right)} (\S\ 44,\ 11)$$

$$x = \frac{a}{\cos m}, \text{ worin } tg\,m = \frac{b}{a}$$

$\log a = 5{,}7048666$	$\log b = 5{,}4456681$
$\cdots \cos m = 9{,}9425090 - 10$	$\cdots a = 5{,}7048666$
$\cdots\cdots\cdots x = 5{,}7623576$	$\cdots tg\,m = 9{,}7408015 - 10$
$x = 578572{,}29$	$m = 28^0\ 50'\ 7''$.

65.

Aufgabe. Man soll aus der Gleichung:

$$a \sin x + b \cos x = c$$

den Winkel x finden.

Auflösung. Man hat zuerst:

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$$

Betrachtet man hier wieder $\frac{b}{a}$ als *tangente* eines Hülfswinkels m, setzt also $tg\,m$ statt $\frac{b}{a}$, so ist:

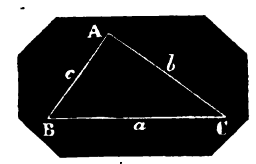
$$\sin x + tg\,m \cdot \cos x = \frac{c}{a} \text{ oder:}$$

$$\sin x + \frac{\sin m}{\cos m} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \quad (\S\ 45,\ 3)$$

$$\sin x \cdot \cos m + \cos x \sin m = \frac{c \cdot \cos m}{a} \text{ und } (\S\ 45,\ 13)$$

$$\sin(x + m) = \frac{c \cdot \cos m}{a}, \text{ worin: } tg\,m = \frac{b}{a}$$

66.



Aufgabe. Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel a, b, C eines Dreiecks die dritte Seite c zu finden.

Auflösung. Am besten berechnet man erst nach § 36 die beiden andern Winkel A und B, und dann nach der *Sinus*-Regel die Seite c. Man kann aber letztere auch mittelst eines Hülfswinkels folgendermassen bestimmen. Zuerst hat man (30):

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \text{ hieraus:}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C \text{ oder:}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab + 2ab - 2ab.\cos C$$
$$c^2 = (a-b)^2 + 2ab(1 - \cos C)$$
$$c^2 = (a-b)^2 + 2ab \cdot 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}C$$
$$c^2 = (a-b)^2 \left\{1 + \frac{4ab \cdot \sin^2 \frac{1}{2}C}{(a-b)^2}\right\}$$
$$c^2 = (a-b)^2 (1 + tg^2 m)$$
$$c = \frac{a-b}{\cos m}, \text{ worin } tg\, m = \frac{2 \sin \frac{1}{2}C \cdot \sqrt{ab}}{a-b}$$

Man kann auch folgendermassen verfahren. Aus:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \text{ folgt:}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab - 2ab \cos C$$
$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab(1 + \cos C)$$
$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab \cdot 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}C$$
$$c^2 = (a+b)^2 \left[1 - \frac{4ab \cdot \cos^2 \frac{1}{2}C}{(a+b)^2}\right]$$
$$c^2 = (a+b)^2 [1 - \sin^2 v]$$
$$c = (a+b) \cos v, \text{ worin } \sin v = \frac{2 \cos \frac{1}{2}C \sqrt{ab}}{a+b}$$

Zur Uebung möge hiezu das Zahlenbeispiel § 37 dienen.

67 a.

Aufgabe. Es sind die Lagen dreier Puncte, N, B, O, oder das dadurch bestimmte Dreieck gegeben, von einem vierten Punct, Z, aus (in derselben Ebene) hat man auf die drei Puncte visirt und die Winkel m und n gemessen. Man soll daraus die Lage dieses vierten Punctes Z, d. h. seine Entfernungen r, r', r'' von den drei Puncten N, B, O bestimmen.

Wir nehmen zu diesem sogenannten Pothonot'schen Problem ein Zahlenbeispiel aus Berghaus' Geographie.

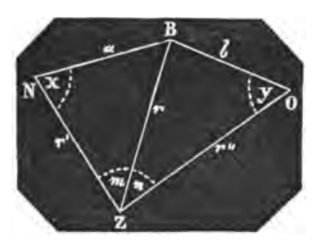
Die Lage des Elisabeth-Thurms in Breslau gegen den Rathhausthurm in Neumarkt und den Thurm der Kirche zu Ohlau ist bekannt. Es beträgt nämlich die Entfernung

von Breslau nach Neumarkt BN $= a = 8227,32$ Ruthen
„ Breslau nach Ohlau BO $= b = 7014,23$ „
der Winkel NBO $=$ B $= 145^0\,39'\,50'',5$
in Zobten wurde gemessen: $\widehat{m} = 52^0\,44'\,22'',2$
$\widehat{n} = 38^0\,37'\,38'',3$

man sucht die Entfernungen r, r', r''.

Auflösung. Man suche erst die beiden Winkel BNZ $=$ x und BOZ $= y$. Ihre Summe ist bekannt, nämlich $x + y = 360 - (B + m + n) = 122^0\,58'\,9''$, also $\frac{x+y}{2} = 61^0\,29'\,4'',5$. Nun ist:

$$(1)\ \frac{\sin y}{\sin n} = \frac{r}{b} \text{ und } (2)\ \frac{\sin m}{\sin x} = \frac{a}{r}$$



Multiplicirt man (1) und (2), so ist

$$\frac{\sin m \cdot \sin y}{\sin n \cdot \sin x} = \frac{a}{b} \text{ oder}$$

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{a \cdot \sin n}{b \cdot \sin m} = tg\,v,$$

wo der Hülfswinkel v leicht zu finden und als bekannt anzusehen ist.

Aus der Gleichung $\frac{\sin y}{\sin x} = tg\,v$ folgt nun:

$$1 - \frac{\sin y}{\sin x} = 1 - tg\,v \text{ und } 1 + \frac{\sin y}{\sin x} = 1 + tg\,v$$

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x} = 1 - tg\,v; \quad \frac{\sin x + \sin y}{\sin x} = 1 + tg\,v$$

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{1 - tg\,v}{1 + tg\,v}$$

$$\frac{tg\,\frac{1}{2}(x - y)}{tg\,\frac{1}{2}(x + y)} = tg\,(45 - v). \text{ (§§ 51 und 52)}$$

$$tg\,\frac{x - y}{2} = tg\,\frac{x + y}{2}\,tg\,(45 - v) \text{ worin:}$$

$$tg\,v = \frac{a \cdot \sin n}{b \cdot \sin m}$$

$\log b = 3{,}8459800$	$\log a = 3{,}9152584$	$\log tg \frac{x+y}{2} = 10{,}2649570$
$\ldots \sin m = 9{,}9008537$	$\ldots \sin n = 9{,}7953599$	$\ldots tg(45-v) = 8{,}6198293$
$3{,}7468337$	$3{,}7106183$	$\ldots tg \frac{x-y}{2} = 8{,}8847863$
$v = 42^0 36' 49'',8$	$3{,}7468337$	$\frac{x-y}{2} = 4^0 23' 9'',2$
$45 - v = 2^0 \cdot 23' 10'',2;$	$\log tg\, v = 9{,}9637846$	

Mithin ist: $x = 65^0\, 52' \cdot 13'',7$ und $y = 57^0\, 5'\, 55'',3$.

Nachdem nun x und y gefunden, hat man aus (1):

$$r = b \frac{\sin y}{\sin n} \text{ oder auch } r = a \frac{\sin x}{\sin m}$$

$$\text{dann: } \frac{r'}{a} = \frac{\sin(x+m)}{\sin m}, \text{ woraus:}$$

$$r' = a \cdot \frac{\sin(x+m)}{\sin m}$$

$$\text{Ferner ist: } \frac{r''}{b} = \frac{\sin(y+n)}{\sin n}, \text{ woraus:}$$

$$r'' = b \cdot \frac{\sin(y+n)}{\sin n}.$$

$\log b = 3{,}8459800$	$\log a = 3{,}9152584$	$\log b = 3{,}8459800$
$\ldots \sin y = 9{,}9240764$	$\ldots \sin(x+m) = 9{,}9434449$	$\ldots \sin(y+n) = 9{,}9978276$
$13{,}7700564$	$13{,}8587033$	$13{,}8438076$
$\ldots \sin n = 9{,}7953599$	$\ldots \sin m = 9{,}9008537$	$\ldots \sin n = 9{,}7953599$
$\ldots r = 3{,}9746965$	$\ldots r' = 3{,}9578496$	$\ldots r'' = 4{,}0484477$
$r = 9434{,}01$	$r' = 9075{,}06$	$r'' = 11180{,}15$

67 b.

* Durch Benutzung eines Hülfswinkels lassen sich bequeme Formeln zur Berechnung der reellen Wurzeln x', x'' einer verwickelten quadratischen Gleichung aufstellen. Man erhält nämlich, unter Berücksichtigung der Vorzeichen von p und q, aus:

$$(1) \quad x^2 + px = q$$

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4q}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{1}{2}p \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}$$

$x = -\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}p\sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}$

Setzt man jetzt $tg\,u = \frac{2\sqrt{q}}{p}$, so ist (§ 100, 7):

$$x = \tfrac{1}{2}p\left(-1 \pm \frac{1}{\cos u}\right) = \tfrac{1}{2}p\left(\frac{-\cos u \pm 1}{\cos u}\right)$$

Die beiden reellen Wurzeln sind also:

$$x' = \tfrac{1}{2}p \cdot \frac{1 - \cos u}{\cos u} = p \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2}u}{\cos u} \qquad (21)$$

$$x'' = -\tfrac{1}{2}p \cdot \frac{1 + \cos u}{\cos u} = -p \cdot \frac{\cos^2 \frac{1}{2}u}{\cos u} \qquad (22)$$

Aus $tg\,u = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ folgt $p = \frac{2\sqrt{q}}{tg\,u} = 2\sqrt{q} \cdot \frac{\cos u}{\sin u}$.

Wird dieser Werth von p substituirt, so ist (§ 100, 16):

$$x' = tg\,\tfrac{1}{2}u \cdot \sqrt{q} \text{ und } x'' = -\frac{\sqrt{q}}{tg\,\frac{1}{2}u}$$

Auf dieselbe Weise findet man aus:

$$(2) \quad x^2 - px = q$$

wenn wiederum $tg\,u = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ gesetzt wird:

$$x' = -tg\,\tfrac{1}{2}u \cdot \sqrt{q} \text{ und } x'' = \frac{\sqrt{q}}{tg\,\frac{1}{2}u}$$

Ferner hat man aus:

$$(3) \quad x^2 + px = -q$$

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{1}{2}p\sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}$$

Ist nun $4q < p^2$, so sind beide Wurzeln reell und negativ. Um sie zu erhalten, setze man: $\sin v = \frac{2\sqrt{q}}{p}$, so ist:

$$x = -\tfrac{1}{2}p\,(1 \mp \cos v)$$

mithin, indem man hierin den Werth von $p = \frac{2\sqrt{q}}{\sin v}$ substituirt, die beiden Wurzeln:

$$x' = -tg\,\tfrac{1}{2}v \cdot \sqrt{q} \text{ und } x'' = -\frac{\sqrt{q}}{tg\,\frac{1}{2}v}$$

Eben so findet man, wenn $4q < p^2$ und wiederum $\sin v = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ gesetzt wird, aus:

$$(4) \quad x^2 - px = -q$$

$$x' = \frac{\sqrt{q}}{tg\,\frac{1}{2}v} \text{ und } x'' = tg\,\tfrac{1}{2}v \cdot \sqrt{q}$$

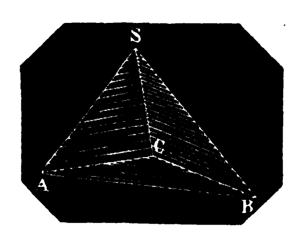
Zweiter Theil.

Sphärische Trigonometrie.

Achtes Buch.



68.



Man denke sich von einem Puncte, S, drei grade Linien ausgehend, wovon SA, SB in der Ebene des Papiers liegen mögen, die dritte Linie SC aber darüber hervortritt. Denkt man sich durch je zwei Linien eine Ebene gelegt, so entsteht bekanntlich eine körperliche Ecke, das sogenannte körperliche Dreieck, *) welches folgende sechs Bestandtheile enthält: 1) die drei Kantenwinkel, welche je zwei der von S ausgehenden drei Linien mit einander bilden, und 2) die drei Flächenwinkel, welche je zwei der drei Ebenen mit einander bilden.**) Man setze die drei Kantenwinkel BSC $= a$, ASC $= b$ und den unteren ASB $= c$ und bezeichne die gegenüber liegenden drei Flächenwinkel mit den gleichlautenden Buchstaben A, B, C, dann ist die allgemeine Aufgabe der sphärischen Trigonometrie: allgemeine Formeln zu finden, nach welchen man aus beliebig gegebenen drei Winkeln des körperlichen Dreiecks die drei übrigen (insofern sie durch erstere drei bestimmt sind) berechnen kann.

*) Die Ecke einer dreiseitigen Pyramide.

**) Man muss sich hier die beiden durch $A\hat{S}C$ und $B\hat{S}C$ gelegten Ebenen dachförmig gegen die untere durch $A\hat{S}B$ gelegte Ebene aufgerichtet denken. Anfänger mögen sich diese Figur versinnlichen, was durch zweimalige Brechung eines Stück Papiers geschehen kann.

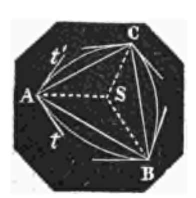
69.



Denkt man sich aus S mit einem beliebigen Radius, SA, zwischen den Schenkeln der drei Kantenwinkel *a*, *b*, *c* des körperlichen Dreiecks Kreisbögen BC, AC, AB beschrieben, so enthalten diese Bögen, in Graden ausgedrückt, ebenso viel Grade als die zugehörigen Kantenwinkel an der Spitze S und können also statt dieser gesetzt und mit denselben Buchstaben *a*, *b*, *c* bezeichnet werden. Dies pflegt man in der Regel zu thun, und da die drei Bögen *a*, *b*, *c*, weil mit demselben Radius beschrieben, offenbar einen Theil von der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunct S und deren Radius SA (= SB = SC) ist, einschliessen und Bögen grössten Kreises sind, so nennt man ein solches krummlinigtes Dreieck auf der Oberfläche einer Kugel (Sphäre) schicklicher Kugeldreieck oder sphärisches Dreieck, daher denn auch der Titel: sphärische Trigonometrie.

Unter Bögen oder Seiten eines sphärischen Dreiecks muss man sich also nicht Längen, sondern immer die Winkel am Mittelpunct der zugehörigen Kugel denken, welche die von den Endpuncten der Bögen dahin gezogenen Radien (Kanten) mit einander bilden mit anderen Worten: man muss in einem sphärischen Dreieck die Seiten (welche stets Bögen grössten Kreises sein müssen) immer in Graden ausgedrückt denken.

70.



Zieht man aus dem Durchschnittspunct A zweier Seiten $\widehat{BA}$, $\widehat{CA}$ eines sphärischen Dreiecks die beiden Tangenten A*t*, A*t'* an dieselben, mithin senkrecht auf dem *radius* SA der Kugel, und zwar die eine in der Ebene ASB, die andere in der Ebene ASC, so stellt der Winkel *t*A*t'* = A den Neigungswinkel der beiden Bögen $\widehat{BA}$, $\widehat{CA}$ gegen einander dar. Ebenso an den beiden anderen Puncten B, C, und diese drei Winkel A, B, C, welche, wenn man sich das körperliche Dreieck S, ABC (vergl. Fig. zu § 69) denkt, offenbar die Flächenwinkel desselben sind, sind die eigentlichen Winkel des sphärischen Dreiecks ABC, weil man zur Abkürzung des Vortrags die drei anderen Winkel *a*, *b*, *c* die Seiten des sphär. Dreiecks nennt. Vergleicht man die Winkel des sphärischen

Dreiecks mit den Winkeln des Sehnendreiecks, so erhellt leicht, dass die Summe der drei (Flächen-) Winkel A, B, C eines sphärischen Dreiecks immer grösser als zwei und kleiner als sechs rechte Winkel ist. Auch ist klar, dass die Summe zweier Seiten (Kantenwinkel) immer grösser ist, als die dritte, und jede Seite (Kantenwinkel) kleiner, als 180° ist. Weil nämlich grösste Kreise sich halbiren (Geometrie § 175), so folgt, dass, wenn man durch den einen Endpunct eines solchen Halbkreises einen Bogen grössten Kreises legt, er, verlängert, nothwendig auch durch den anderen Endpunct gehen muss und mit ersterem Halbkreise ein sogenanntes Kugelzweieck bildet. Es kann folglich keine Seite in einem sphärischen Dreieck =180° sein. Verlängert man die eine Seite eines solchen Zweiecks, so kann man durch die Endpuncte dieser zwei Bögen grössten Kreises legen, welche sich innerhalb des Zweiecks schneiden und mit ersterer Seite, >180°, ein Dreieck bilden, welches einen eingehenden oder überstumpfen Winkel hat; solche Dreiecke lassen wir jedoch unberücksichtigt.



71.



Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man aus den drei Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks ABC einen Winkel, z. B. A, berechnen kann.

Auflösung. Da der sphärische Winkel A nichts anderes ist, als die Neigung der beiden Ebenen ASC und ASB gegen einander, so errichten wir auf ihrer Durchschnittslinie SA, im Puncte A, die beiden Perpendikel AE und AD, wovon das erstere in der unteren Ebene ASB liegt und den verlängerten Radius SB in E trifft*), das andere in der dachförmig dagegen aufstehenden Ebene ASC liegt und den verlängerten Radius SC in D trifft, so dass also $\widehat{SAE} = 90°$ und auch $\widehat{SAD} = 90°$, dann ist der Winkel DAE = A der gesuchte. (Geometrie § 155.)

*) Die Fälle, wo AE‖SB oder AD‖SC ist, oder wo ein, zwei oder alle drei Winkel, a, b, c, rechte, oder stumpfe wären, können wir als specielle Fälle aus den allgemeinen Gleichungen ableiten. Die Schlüsse bleiben übrigens ganz dieselben, wenn z. B. der Winkel ASB stumpf wäre und der Fusspunct A der beiden Perpendikel AE, AD auf der Verlängerung von AS über S hinaus angenommen werden müsste.

Denkt man noch DE gezogen, so hat man aus dem Dreieck DAE:

$$\cos A = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - \overline{DE}^2}{2 \cdot AD \cdot AE} \quad (\S\ 30)$$

Eben so hat man aus dem gegen ASE dachförmig aufstehenden Dreieck DSE, in welchem der Kantenwinkel $D\widehat{S}E = a$ ist (§ 69):

$$\cos a = \frac{\overline{SD}^2 + \overline{SE}^2 - \overline{DE}^2}{2 \cdot SD \cdot SE}.$$

Hieraus den Werth von $\overline{DE}^2$ gezogen und in die erste Gleichung substituirt, kommt:

$$\cos A = \frac{2SD \cdot SE \cdot \cos a - (\overline{SD}^2 - \overline{AD}^2) - (\overline{SE}^2 - \overline{AE}^2)}{2AD \cdot AE}$$

Die beiden Dreiecke DAS, EAS sind bei A rechtwinklig, SD und SE die Hypotenusen, daher $\overline{SD}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{AS}^2$, eben so $\overline{SE}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{AS}^2$, mithin:

$$\cos A = \frac{2 \cdot SD \cdot SE \cdot \cos a - 2\overline{AS}^2}{2AD \cdot AE}$$

$$\cos A = \frac{SD}{AD} \cdot \frac{SE}{AE} \cdot \cos a - \frac{AS}{AD} \cdot \frac{AS}{AE}$$

Nun ist in dem bei A rechtwinkligen Dreieck SAD, $\frac{AD}{SD} = \sin b$; mithin $\frac{SD}{AD} = \frac{1}{\sin b}$; ferner: $\frac{AS}{AD} = \cot b = \frac{\cos b}{\sin b}$. Im rechtwinkligen Dreieck SAE ist $\frac{AE}{SE} = \sin c$, also: $\frac{SE}{AE} = \frac{1}{\sin c}$; ferner $\frac{AS}{AE} = \cot c = \frac{\cos c}{\sin c}$; dies substituirt, hat man:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

In dieser Gleichung ist von Lineargrössen keine Spur mehr vorhanden. Für die beiden andern Winkel B und C ist offenbar eben so:

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$$

Wäre, als specieller Fall, jede der drei Seiten des sphärischen Dreiecks, $a, b, c, = 90^0$, so wäre $\cos A = 0$, $\cos B = 0$, $\cos C = 0$, also auch $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 90$; sind alle drei Seiten $a, b, c, > 90$, so sind auch alle drei Winkel A, B, C stumpf, weil dann ihre *cosinus* negativ.

72.

Die vorstehenden Formeln, nach welchen man aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks die Winkel berechnen kann, sind zwar die Fundamentalformeln der ganzen sphärischen Trigonometrie, indem alle übrigen daraus abgeleitet werden können, für die logarithmische Rechnung sind sie aber etwas unbequem und wir wollen deshalb noch eine für die numerische Rechnung bequemere daraus ableiten. Man hat aus:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$1 - \cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin b \cdot \sin c - \cos a + \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c} \text{ also (§ 52, 41):}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2 \sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin b \cdot \sin c}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$1 + \cos A = 1 + \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin b \cdot \sin c + \cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \cdot \sin c} \text{ (§ 52)}$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2 \sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin b \cdot \sin c}} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

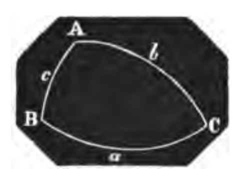
$$tg \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Von diesen drei Formeln ist die letztere vorzuziehen, weil die Tangenten immer die grössten Differenzen haben. Sie lässt sich aber noch etwas vereinfachen. Setzt man nämlich: $a+b+c=s$, also $\frac{a+b+c}{2}=\frac{1}{2}s$; $\frac{a+b-c}{2}=\frac{1}{2}s-c$ etc., so ist:

$$tg\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{sin(\frac{1}{2}s-b)\cdot sin(\frac{1}{2}s-c)}{sin\,\frac{1}{2}s\cdot sin(\frac{1}{2}s-a)}}$$

Zahlenbeispiele hiezu siehe § 91.

73.



Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreieck verhalten sich die *sinus* der Winkel, wie die *sinus* der gegenüber liegenden Seiten. In Zeichen:

$$\frac{sin\,A}{sin\,B}=\frac{sin\,a}{sin\,b};\qquad \frac{sin\,A}{sin\,C}=\frac{sin\,a}{sin\,c};\qquad \frac{sin\,B}{sin\,C}=\frac{sin\,b}{sin\,c}$$

Beweis. Es folgt aus $cos\,A=\frac{cos\,a-cos\,b\cdot cos\,c}{sin\,b\cdot sin\,c}$ (§ 71):

$$1-cos^2A=1-\frac{(cos\,a-cos\,b\cdot cos\,c)^2}{sin^2b\cdot sin^2c}$$

$$sin^2A=\frac{sin^2b\cdot sin^2c-cos^2a+2\,cos\,a\cdot cos\,b\cdot cos\,c-cos^2b\cdot cos^2c}{sin^2b\cdot sin^2c}$$

Nun ist aber $sin^2b\,sin^2c=(1-cos^2b)(1-cos^2c)=1-cos^2b-cos^2c+cos^2b\,cos^2c$. Letzterer Ausdruck statt $sin^2b\cdot sin^2c$ gesetzt, kommt:

$$sin^2A=\frac{1-cos^2a-cos^2b-cos^2c+2\,cos\,a\,cos\,b\,cos\,c}{sin^2b\cdot sin^2c}$$

In dieser Gleichung ist der Zähler rechter Hand offenbar eine symmetrische Function von a, b, c (d. h. die Verwechselung dieser Grössen bringt keine Veränderung hervor); setzen wir ihn Kürze halber $=z^2$, so ist:

$$sin\,A=\frac{z}{sin\,b\cdot sin\,c}\;\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Werden die beiden anderen Gleichungen:

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c} \text{ und } \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$$

ebenso behandelt, so kommt, was auch ohne Rechnung klar ist, indem der Zähler rechter Hand, weil eine symmetrische Function von a, b, c, in beiden Fällen offenbar ganz derselbe, wie in (1) ist:

$$\sin B = \frac{z}{\sin a \sin c} \ldots\ldots (2) \qquad \sin C = \frac{z}{\sin a \sin b} \ldots\ldots$$

Die Gleichungen 1, 2, 3 paarweise durch einander dividirt, kommt, wie behauptet, $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b}$ etc., oder auch, weil die Seiten doch in Graden ausgedrückt (Winkel) sind, so geschrieben:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

74.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man aus den drei Winkeln A, B, C eines sphärischen Dreiecks eine Seite, z. B. a, berechnen kann.

Auflösung. Die drei Fundamentalgleichungen (§ 71):

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$$

enthalten die drei gegebenen Grössen, A, B, C und drei unbekannte a, b, c. Um die unbekannte a zu finden, eliminiren wir die beiden andern b, c, oder nur $\cos b$, $\cos c$, indem, zufolge § 73, $\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}$ und $\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A}$, mithin $\sin b$ durch $\sin a . \frac{\sin C}{\sin A}$ und $\sin c$ durch $\sin a \cdot \frac{\sin C}{\sin A}$ ersetzt werden kann.

Reduciren wir, um zuerst $\cos b$ zu eliminiren, jede der drei Gleichungen auf $\cos b$, so kommt:

$$\cos b = \frac{\cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A}{\cos c}$$

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B$$

$$\cos b = \frac{\cos c - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C}{\cos a}$$

Diese für $\cos b$ gefundenen Ausdrücke paarweise gleich gesetzt, geben folgende zwei neue Gleichungen:

$$\frac{\cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A}{\cos c} = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \ldots . (1)$$

$$\frac{\cos c - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C}{\cos a} = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \ldots . (2)$$

Um aus diesen beiden Gleichungen $\cos c$ zu eliminiren, reducire man jede auf $\cos c$. Die erste giebt:

$$\cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = \cos a \cdot \cos^2 c + \sin a \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B$$

$$\cos a (1 - \cos^2 c) - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B$$

$$\cos a \cdot \sin^2 c - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B$$

$$\cos c = \frac{\cos a \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos A}{\sin a \cdot \cos B}$$

Aus der Gleichung (2) folgt:

$$\cos c - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C = \cos^2 a \cdot \cos c + \sin a \cdot \cos a \cdot \sin c \cdot \cos B$$

$$\cos c (1 - \cos^2 a) - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C = \sin a \cdot \cos a \cdot \sin c \cdot \cos B$$

$$\cos c \cdot \sin^2 a - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C = \sin a \cdot \cos a \cdot \sin c \cdot \cos B$$

$$\cos c = \frac{\cos a \sin c \cdot \cos B + \sin b \cdot \cos C}{\sin a}$$

Die beiden für $\cos c$ erhaltenen Ausdrücke gleich gesetzt, geben:

$$\frac{\cos a \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos A}{\sin a \cdot \cos B} = \frac{\cos a \cdot \sin c \cdot \cos B + \sin b \cdot \cos C}{\sin a}$$

Aus dieser Endgleichung folgt:

$$\cos a \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos A = \cos a \cdot \sin c \cdot \cos^2 B + \sin b \cdot \cos B \cdot \cos C$$

$$\cos a \cdot \sin c (1 - \cos^2 B) = \sin b \cdot \cos A + \sin b \cdot \cos B \cdot \cos C$$

$$\cos a \cdot \sin c \cdot \sin^2 B = \sin b (\cos A + \cos B \cdot \cos C)$$

$$\cos a = \frac{\sin b}{\sin c} \frac{(\cos A + \cos B \cos C)}{\sin^2 B}$$

Nach § 73 kann man aber $\frac{\sin B}{\sin C}$ statt $\frac{\sin b}{\sin c}$ setzen, mithin ist auch, nach gehöriger Reduction:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

eben so: $$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \cdot \sin C}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}$$

75.

Vorstehende Formeln, welche mit den Grundformeln eine auffallende Aehnlichkeit haben, sind aber, eben so wie jene, für die logarithmische Rechnung etwas unbequem. Auf dieselbe Weise aber, wie in § 72, lassen sich bequemere daraus ableiten. Man hat nämlich aus:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$1 - \cos a = 1 - \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin B \cdot \sin C - \cos A - \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{-(\cos A + \cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C)}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = -\left\{\frac{\cos A + \cos (B + C)}{\sin B \cdot \sin C}\right\}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = -\frac{2 \cos \frac{A+B+C}{2} \cdot \cos \frac{B+C-A}{2}}{\sin B \cdot \sin C} \quad (\S\ 52.)$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{A+B+C}{2} \cdot \cos \frac{B+C-A}{2}}{\sin B \cdot \sin C}} \quad \ldots\ldots (1)$$

Das Imaginaire dieser Formel ist nur scheinbar, denn da (§ 70) $A + B + C > 180^0$ und $< 540^0$, so ist auch $\frac{A+B+C}{2} > 90^0$ und $< 270^0$ und folglich $\cos\frac{A+B+C}{2}$ immer eine negative Grösse, welche durch das davor stehende nothwendige Minus-Zeichen positiv gemacht wird.

Ferner hat man auch:

$$1 + \cos a = 1 + \frac{\cos A + \cos B . \cos C}{\sin B . \sin C}$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin B . \sin C + \cos A + \cos B . \cos C}{\sin B . \sin C}$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\cos A + \cos (B - C)}{\sin B . \sin C}$$

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{2 \cos\frac{A+B-C}{2} . \cos\frac{A+C-B}{2}}{\sin B . \sin C}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos\frac{A+B-C}{2} . \cos\frac{A+C-B}{2}}{\sin B . \sin C}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

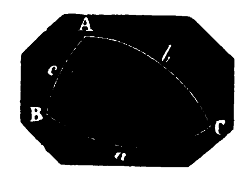
Dividirt man (1) durch (2), so erhält man die practisch immer sichere Formel:

$$tg \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{- \cos\frac{A+B+C}{2} . \cos\frac{B+C-A}{2}}{\cos\frac{A+B-C}{2} \cos\frac{A+C-B}{2}}}$$

oder, wenn man wieder $A + B + C = S$ setzt, kürzer:

$$tg \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{- \cos \frac{1}{2} S . \cos (\frac{1}{2} S - A)}{\cos (\frac{1}{2} S - B) . \cos (\frac{1}{2} S - C)}}$$

76.



Aufgabe. Eine Gleichung zwischen vier auf einander folgenden Stücken eines sphärischen Dreiecks, z. B. für A, c, B, a zu finden, so dass man, wenn irgend drei davon gegeben sind, das vierte darnach berechnen kann.

Auflösung. Die Elimination von $\cos b$ aus den beiden Grundformeln

$$\left.\begin{aligned}\cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}\\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}\end{aligned}\right\} \text{giebt § 74:}$$

$$\cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B = \frac{\cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A}{\cos c}$$

$$\cos a \cdot \cos^2 c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B = \cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$$\sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B = \cos a (1 - \cos^2 c) - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$$\sin a \cdot \cos c \cdot \cos B = \cos a \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos A$$

$$\cos c \cdot \cos B = \frac{\cos a}{\sin a} \cdot \sin c - \frac{\sin b}{\sin a} \cdot \cos A$$

$$\cos c \cdot \cos B = \cot a \cdot \sin c - \frac{\sin B}{\sin A} \cdot \cos A \quad (§\ 73)$$

$$\cot A \sin B + \cos B \cdot \cos c = \cot a \cdot \sin c$$

Obgleich sich diese Formel, um darnach aus drei gegebenen Grössen die vierte zu finden, durch Einführung eines Hülfswinkels für die logarithmische Rechnung bequemer machen lässt, so werden wir doch für diesen practischen Zweck noch bequemere Formeln finden, und legen ihr deshalb auch nur eine theoretische Wichtigkeit bei.

77.

Zufolge der § 72 gefundenen Gleichungen ist:

$$1,\quad \sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin b \cdot \sin c}}$$

$$2,\quad \sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \frac{b+c-a}{2} \cdot \sin \frac{a+b-c}{2}}{\sin a \cdot \sin c}}$$

$$3,\quad \sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+c-b}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin a \cdot \sin b}}$$

$$4,\quad \cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin b \cdot \sin c}}$$

$$5,\quad \cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin a \cdot \sin c}}$$

$$6,\quad \cos \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{a+b-c}{2}}{\sin a \cdot \sin b}}$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit der fünften und dividirt durch die sechste etc., wie nachfolgend durch $\frac{(1)\cdot(5)}{(6)}$ etc. angedeutet, so kommt:

$$\frac{(1)\cdot(5)}{(6)};\ \frac{\sin\frac{1}{2}A\cdot\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{a+c-b}{2}}{\sin c}\ \ldots\ldots\ (7)$$

$$\frac{(2)\cdot(4)}{(6)};\ \frac{\cos\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin c}\ \ldots\ldots\ (8)$$

$$\frac{(4)\cdot(5)}{(3)};\ \frac{\cos\frac{1}{2}A\cdot\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}}{\sin c}\ \ldots\ldots\ (9)$$

$$\frac{(1)\cdot(2)}{(3)};\ \frac{\sin\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin c}\ \ldots\ldots\ (10)$$

Durch paarweise Addition und Subtraction dieser vier Gleichungen erhält man mit Berücksichtigung der Formeln 9, 10, 11, 12, 16, 30, 31 § 100:

$$(7)+(8);\ \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{2\sin\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{1}{2}c}\ \ldots\ (11)$$

$$(7)-(8);\ \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{2\cos\frac{1}{2}c\cdot\sin\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{1}{2}c}\ \ldots\ (12)$$

$$(9)-(10);\ \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{1}{2}c}{2\sin\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{1}{2}c}\ \ldots\ (13)$$

$$(9)+(10);\ \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{1}{2}c}{2\sin\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{1}{2}c}\ \ldots\ (14)$$

78.

Aus den vier letztern Formeln folgt nun, dass:

$$\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\tfrac{1}{2}c = \cos\tfrac{1}{2}C\cdot\cos\frac{a-b}{2},$$

$$\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}C\cdot\cos\frac{a+b}{2}$$

$$\sin\frac{A-B}{2}\cdot\sin\tfrac{1}{2}c = \cos\tfrac{1}{2}C\cdot\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\cos\frac{A-B}{2}\cdot\sin\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}C\cdot\sin\frac{a+b}{2}$$

Diese vier merkwürdigen, von Gauss gefundenen Gleichungen, von welchen jede alle sechs Stücke des sphärischen Dreiecks enthält und von welchen in der theoria motus so vielfacher Gebrauch gemacht ist, hat seinerseits Delambre auch gefunden,*) jedoch ihre Wichtigkeit ganz übersehen. Sie dienen nämlich dem Astronomen, der oft sphärische Dreiecke zu berechnen hat, zur Controlle. Hierauf hat zuerst Gauss aufmerksam gemacht und ihren Nutzen hervorgehoben.**)

Anmerkung. Weil sowohl jeder Winkel als jede Seite im sphärischen Dreieck immer kleiner als 180°, mithin auch $\sin\tfrac{1}{2}C$ und $\cos\tfrac{1}{2}c$ immer positiv ist, so folgt aus der zweiten Formel, nämlich aus:

$$\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}C\cdot\cos\frac{a+b}{2}$$

dass $\cos\frac{A+B}{2}$ und $\cos\frac{a+b}{2}$ immer einerlei Vorzeichen haben, mithin die Summe zweier Seiten mit der Summe der beiden ihnen gegenüber liegenden Winkel immer gleichartig ist, d. h.: beiderlei Summen sind gleichzeitig über, unter oder just gleich 180°. In Zeichen, wenn:

$$A+B \gtreqless 180^0, \text{ so ist zugleich auch } a+b \gtreqless 180^0.$$

*) Connaissance des tems 1808.

**) Göttinger Gelehrten-Anzeigen 1811, S. 1984.

Nach diesem wichtigen Satze kann man oftmals entscheiden, ob ein sphärisches Dreieck durch gegebene Stücke bestimmt oder zweideutig ist.

79.

Dividirt man die vorstehenden vier Gleichungen paarweise durch einander, so erhält man die schon früher auf anderem Wege von Napier gefundenen und nach ihm benannten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} tg\frac{A+B}{2} &= cot\tfrac{1}{2}C.\frac{cos\frac{a-b}{2}}{cos\frac{a+b}{2}} \\ tg\frac{A-B}{2} &= cot\tfrac{1}{2}C.\frac{sin\frac{a-b}{2}}{sin\frac{a+b}{2}} \end{aligned}\right\}$$



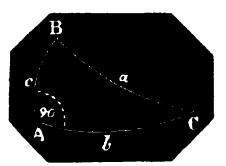
$$\left.\begin{aligned} tg\frac{a+b}{2} &= tg\tfrac{1}{2}c.\frac{cos\frac{A-B}{2}}{cos\frac{A+B}{2}} \\ tg\frac{a-b}{2} &= tg\tfrac{1}{2}c.\frac{sin\frac{A-B}{2}}{sin\frac{A+B}{2}} \end{aligned}\right\}$$

Das erste Paar dieser Gleichungen ist immer anzuwenden, wenn von einem sphärischen Dreieck zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, das zweite Paar dagegen, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.

Neuntes Buch.

Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.

80.



Erklärung. In einem bei A rechtwinkligen sphärischen Dreieck, ABC, heissen die den rechten Winkel einschliessenden Seiten b und c Catheten und die ihm gegenüber liegende Seite a die Hypotenuse. Es ist leicht einzusehen, dass beim rechtwinkligen sphärischen Dreieck der Fall vorkommen kann, wo die Hypotenuse kleiner ist, als jede der beiden Catheten. (Man denke sich nur auf einem Erdglobus A als Pol und die Catheten b, c als Meridiane und beide über den Aequator hinaus verlängert, die Endpuncte dann durch einen Bogen grössten Kreises verbunden.)

Das rechtwinklige Dreieck kommt bei Anwendungen der sphärischen Trigonometrie am häufigsten vor und deshalb wollen wir noch die besondern Formeln für dasselbe aufstellen. Es ist klar, dass diese besondern Formeln aus den vorhin gefundenen allgemeinen sehr leicht abgeleitet werden können und viel einfacher sein werden.

81.

Die vorhin gefundenen allgemeinen Formeln, in welchen der Winkel A vorkommt, sind:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \sin B}{\sin A \cdot \sin B}$$

$$\left.\begin{aligned} \cot A \cdot \sin B + \cos B \cdot \cos c &= \cot a \cdot \sin c \\ \cot A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b &= \cot a \cdot \sin b \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \cot B \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos c &= \cot b \cdot \sin c \\ \cot C \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos b &= \cot c \cdot \sin b \end{aligned}\right\}$$

82.

Setzt man nun in allen diesen vorstehenden Formeln $A = 90^0$ und beachtet, dass $\cos 90^0 = 0$; $\sin 90^0 = 1$ und $\cot 90^0 = 0$, so erhält man die folgenden sechs, viel einfachern Formeln für das bei A rechtwinklige sphärische Dreieck ABC:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c \ldots\ldots (1)$$

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \ldots\ldots (2)$$

$$\cos a = \cot B \cdot \cot C \ldots\ldots (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos b &= \frac{\cos B}{\sin C} \\ \cos c &= \frac{\cos C}{\sin B} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos B &= \cot a \cdot tg\, c \\ \cos C &= \cot a \cdot tg\, b \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \cot B &= \cot b \cdot \sin c \\ \cot C &= \cot c \cdot \sin b \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (6)$$

83.

Nach vorstehenden sechs Formeln kann man also, wenn von einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck, ABC (ausser dem rechten Winkel A) irgend zwei Stücke gegeben sind, jedes der drei andern leicht finden. Wäre z. B. b und C gegeben und B gesucht, so folgt aus der vierten Formel: $\cos B = \cos b \cdot \sin C$. Um jedoch diese für den practischen Astronomen und Steuermann wichtigen Formeln leichter behalten und anwenden zu können, merke man sich folgende, schon von Napier gegebene leichte Gedächtnissregel.

Wenn man den rechten Winkel A ausser Acht lässt, so sind je drei der übrigen fünf Stücke so geordnet, dass immer ein Stück die Mitte bildet, und dann die beiden andern Stücke entweder unmittelbar zu beiden Seiten mit dem Mittelstücke verbunden oder noch durch ein Stück vom Mittel getrennt sind, wobei aber, wie gesagt, der rechte Winkel nicht mitzählt, die beiden Catheten also, als nicht durch ihn getrennt, sondern als unmittelbar an einander liegend zu betrachten sind. Hat man diese Ordnung unter irgend drei Stücken im sphärischen Dreieck heraus gefunden, so lautet die einfache Regel: Es ist allemal der *cosinus* der Mitte gleich dem Product aus den *sinus* der beiden getrennten, und auch gleich dem Product aus den *cotangenten* der beiden verbundenen Stücke, wobei aber statt der trigonometrischen Function einer *Cathete* immer ihre sinnverwandte gesetzt werden muss.

Dass in dieser leicht zu behaltenden Gedächtnissregel alle in § 82 aufgestellten sechs Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck wirklich enthalten sind, wollen wir jetzt nachweisen, und dabei zugleich diese Regel einüben.

84.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen den drei Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks zu finden.

Auflösung. Die Hypotenuse a ist hier offenbar die Mitte, die Cathete b durch den Winkel C und die Cathete c durch den Winkel B davon getrennt. Daher nach obiger Regel: $\cos a = \sin b \cdot \sin c$, also, weil

b und c **Catheten** sind, und statt der trigonometrischen Functionen derselben nach der Vorschrift ihre sinnverwandten gesetzt werden sollen, so erhält man die Formel (1) § 82, nämlich:

$$\cos \bar{a} = \cos b \cdot \cos c$$

Aus dieser unzweideutigen Formel folgt, dass, wenn $\cos b$ und $\cos c$ einerlei Vorzeichen haben, die Hypotenuse $< 90^0$ ist.

85.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen zwei Catheten b, c und einem schiefen Winkel B zu finden.

Auflösung. Weil der rechte Winkel nicht mitzählt, so ist hier offenbar c die Mitte, B und b sind unmittelbar damit verbunden, daher: $\cos c = \cot B \cdot \cot b$, mithin weil b und c Catheten sind:

$$\sin c = \cot B \cdot tg\, b, \text{ hieraus:}$$

$$\cot B = \frac{\sin c}{tg\, b} (= \sin c \cdot \cot b) \cdot \cdot (\S\ 82,\ (6))$$

Diese Formel zeigt, dass, weil alle Winkel und Seiten $< 180^0$, also $\sin c$ immer positiv ist, $\cot B$ und $\cot b$ immer einerlei Vorzeichen haben, mithin im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ein Winkel und die ihm gegenüber liegende Seite, z. B. B und b, immer **gleichartig** sind, d. h. wenn:

$$B \lesseqgtr 90^0, \text{ auch } b \lesseqgtr 90^0$$

Durch obige Formel: $\cot B = \sin c \cdot \cot b$ ist also sowohl B als b vollkommen bestimmt. Die aus B und b zu berechnende Cathete c aber $\left(\sin c = \frac{\cot B}{\cot b} = \frac{tg\, b}{tg\, B}\right)$ bleibt zweideutig, wenn man nicht weiss, ob der ihr gegenüber liegende Winkel C spitz oder stumpf ist.

86.

Aufgabe. Man suche eine Gleichung zwischen der Hypotenuse a, der Cathete b und dem Winkel B.

Auflösung. Weil der rechte Winkel nicht mitzählt, so ist hier b die Mitte, a durch C, und B durch c davon getrennt, daher: $\cos b = \sin a \cdot \sin B$, mithin, weil b eine Cathete ist:

$$\sin b = \sin a \cdot \sin B \quad (\S\ 82,\ (2))$$

Durch diese Formel sind die Grössen b und B, weil gleichartig, vollkommen bestimmt (§ 85). Was aber die durch ihren *sinus* gegebene Hypotenuse a betrifft, so ist sie im Allgemeinen zweideutig. Weil jedoch $A+B$ oder (weil $A=90$), $90+B$ mit $a+b$ gleichartig ist, so sind die besonderen Fälle, wo a bestimmt ist, folgende:

1) Wenn $B=90^0$, also auch $b=90^0$, so ist auch $a=90^0$.

2) Sei $B<90$, also auch $b<90$ und auch $a+b<180^0$. Giebt es nun von den beiden Werthen von a nur einen, der zu b addirt $<180^0$ giebt, so ist a bestimmt.

3) Sei $B>90$, also auch $a+b>180^0$. Giebt es nun unter den beiden Werthen für a nur einen, der zu b addirt $>180^0$ giebt, so ist a bestimmt, sonst nicht.

87.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen den zwei schiefen Winkeln B, C und einer Cathete b zu finden.

Auflösung. Hier ist B die Mitte, von welcher C durch a und b durch c getrennt ist, daher $\cos B = \sin C \cdot \sin b$, mithin, weil b eine Cathete ist:

$$\cos B = \sin C \cdot \cos b \quad (\S\ 82\ (4)).$$

Durch diese Formel sind B und b vollkommen bestimmt, C aber bleibt zweideutig.

88.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen der Hypotenuse a und den zwei schiefen Winkeln B und C zu finden.

Auflösung. Hier ist a die Mitte, B und C damit verbunden, mithin:

$$\cos a = \cot B \cdot \cot C \quad (\S\ 82,\ (3))$$

89.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen a, c, B zu finden.

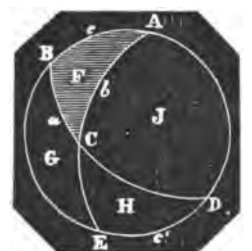
Auflösung. Hier ist B die Mitte, a und c damit verbunden, daher $\cos B = \cot a \cdot \cot c$, oder, weil c eine Cathete ist:

$$\cos B = \cot a \cdot tg\, c \quad (82\ (5)).$$

Man sieht also, dass diese leichte Gedächtnissregel wirklich alle sechs in § 82 für das rechtwinklige sphärische Dreieck aufgestellten Formeln umfasst.

90.

Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks.



Lehrsatz. Bezeichnet F den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks, ABC, und r den *radius* der zugehörigen Kugel, so ist.

$$F = \frac{A + B + C - 180}{180} \cdot r^2 \pi$$

Beweis. Der leichtern Vorstellung halber nehme man eine Kugel zur Hand und zeichne darauf ein sphärisches Dreieck, ABC, verlängere je zwei Bögen desselben vorwärts und rückwärts, bis sie sich abermals schneiden, so wird dadurch die ganze Oberfläche der Kugel in acht Dreiecke getheilt, wovon jedoch hier nur die auf der obern Hälfte liegenden vier, F, G, H, J, zu sehen sind. Weil nun jeder grösste Kreis ABEDA die Kugel halbirt und zwei grösste Kreise wie ABE, ACE sich gegenseitig halbiren, so ist klar, dass die vier Dreiecke F, G, H, J wirklich die halbe Kugelfläche ($2r^2 \pi$) einnehmen; ferner, dass die Verlängerung der beiden Seiten a, b über A und B hinaus, mit c ein Dreieck, H', auf der andern Seite der Kugel bilden, welches dem Dreieck H, wenn auch symmetrisch, doch an Grösse vollkommen gleich ist, weil sie aus gleich grossen Bögen gebildet sind. (So ist z. B. $c' = c$, weil beide zu $\widehat{BE}$ addirt einen Halbkreis geben.)

Nun ist der Streifen der Kugeloberfläche, welchen die beiden Halbkreise ABE und ACE einschliessen, das sogenannte Kugel-

zweieck, der eben so vielste Theil von der ganzen Kugeloberfläche, als es der sphärische Winkel A von 360° ist, daher:

$$F+G=\frac{A}{360}\cdot 4r^2\pi \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Eben so ist der Flächeninhalt der von den beiden Halbkreisen BAD, BCD gebildeten Zweiecks, nämlich:

$$F+J=\frac{B}{360}\cdot 4r^2\pi \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Ferner bildet das Dreieck F mit dem auf der andern Seite der Kugel liegenden Dreieck H′ ein Kugelzweieck, dessen Fläche $F+H'=\frac{C}{360}\cdot 4r^2\pi$, daher, weil $H=H'$

$$F+H=\frac{C}{360}\cdot 4r^2\pi \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Addirt man die Gleichungen, so ist:

$$3F+G+H+J=\frac{A+B+C}{360}\cdot 4r^2\pi$$

Zieht man hievon $F+G+H+J=2r^2\pi$ ab, so ist:

$$2F=\frac{A+B+C}{360}4r^2\pi-2r^2\pi$$

$$F=\left(\frac{A+B+C}{180}-1\right)r^2\pi$$

$$F=\frac{A+B+C-180}{180}\cdot r^2\pi$$

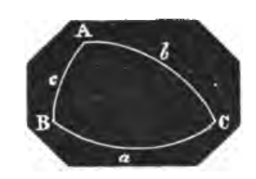
oder, wenn man den Ueberschuss der drei sphärischen Winkel A, B, C über 180°, den sogenannten sphärischen Excess mit e bezeichnet:

$$F=\frac{e}{180}\cdot r^2\pi.$$

Zehntes Buch.

Beispiele zur numerischen Berechnung eines sphärischen Dreiecks.

91.



Aufgabe. Es sind alle drei Seiten eines sphärischen Dreiecks gegeben:

$a=72^0\,14'26'', \ b=110^0\,18'20'', \ c=48^0\,50'42''$

Man suche die Winkel A, B, C.

Auflösung. Zufolge § 72 hat man:

$$tg\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{sin(\frac{1}{2}s-b)\,sin(\frac{1}{2}s-c)}{sin\,\frac{1}{2}s\cdot sin(\frac{1}{2}s-a)}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{sin(\frac{1}{2}s-a)\,sin(\frac{1}{2}s-c)}{sin\,\frac{1}{2}s\cdot sin(\frac{1}{2}s-b)}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{sin(\frac{1}{2}s-a)\,sin(\frac{1}{2}s-b)}{sin\,\frac{1}{2}s\cdot sin(\frac{1}{2}s-c)}}$$

$a=\ 72^0\,14'26''$	$\frac{1}{2}s \ =115^0\,41'\,44''$
$b=110\cdot18\cdot20$	$\frac{1}{2}s-a=\ 43\cdot27\cdot18$
$c=\ 48\cdot50\cdot42$	$\frac{1}{2}s-b=\ \ 5\cdot23\cdot24$
$s=231\cdot23\cdot28$	$\frac{1}{2}s-c=\ 66\cdot51\cdot\ 2$

$$\begin{array}{rl} \log \sin(\tfrac{1}{2}s - b) = & 8{,}9728253 \\ \cdot\cdot\cdot \sin(\tfrac{1}{2}s - c) = & 9{,}9635435 \\ \hline & 18{,}9363688 \\ & 19{,}7922306 \\ \hline 2) & 0{,}1441382 - 1 \quad \text{(Algebra § 281)} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log \sin \tfrac{1}{2}s = & 0{,}9547781 \\ \cdot\cdot\cdot \sin(\tfrac{1}{2}s - a) = & 9{,}8374525 \\ \hline & 19{,}7922306 \end{array}$$

$$\log tg \tfrac{1}{2}A = 9{,}5720691 - 10$$

$$\tfrac{1}{2}A = 20^0\, 28'\, 15'',9$$

Eben so findet man $\frac{1}{2}$B und $\frac{1}{2}$C, mithin ist:

$$A = 40^0\, 56'\, 31'',8; \quad B = 139^0\, 48'\, 35'',4; \quad C = 31^0\, 12'\, 13'',5$$

92.

Aufgabe. Es sind zwei Seiten, b, c, und ein Gegenwinkel, B, gegeben. Man sucht den anderen Gegenwinkel C. Es sei z. B. $b = 110^0\, 18'20''$, $c = 48^0\, 50'\, 42''$, $B = 139^0\, 48'\, 35''.4$.

Auflösung. In diesem Fall gebraucht man immer die Regel der vier *sinus*. Diese giebt: $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin b}$, hieraus:

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin b} \cdot \sin B$$

Anmerkung. Da hier der Winkel C durch seinen *sinus* bestimmt wird und deshalb sowohl spitz als stumpf sein kann, so ist klar, dass durch zwei Seiten und einen Gegenwinkel im Allgemeinen ein sphärisches Dreieck nicht bestimmt ist (vergl. § 29).

Weil aber B + C mit $b + c$ gleichartig ist (§ 78 Anmerkung), so können wir jedoch folgendes festsetzen:

1) Ist $b + c = 180^0$, so ist auch $B + C = 180^0$, mithin:

$$\begin{array}{lcl} C = 90^0, & \text{wenn} & B = 90^0 \\ C > 90 & \text{„} & B < 90 \\ C < 90 & \text{„} & B > 90 \end{array}$$

2) Ist $b + c < 180^0$, also auch $B + C < 180^0$, so ist:

$$C < 90^0 \quad \text{wenn} \quad B \gtreqless 90^0.$$

Ist aber $B < 90$, so ist C unbestimmt. Kann jedoch C nur auf eine Weise so genommen werden, dass $B+C < 180$, so ist C bestimmt.

3) Ist endlich $b+c > 180$, also auch $B+C > 180$, so ist:

$$C > 90 \text{ wenn } B \overline{\lesseqgtr} 90$$

Wäre aber $B > 90$, so ist C wieder unbestimmt, es sei denn, dass C nur auf eine Weise so genommen werden kann, dass $B+C > 180^0$.

$$\begin{aligned}
\log \sin B &= 9{,}8097796 \\
\ldots \sin c &= \underline{9{,}8767558} \\
& 19{,}6865354 \\
\ldots \sin b &= \underline{9{,}9721358} \\
\ldots \sin C &= 9{,}7143996 \\
C &= 31^0, 12', 13'', 5
\end{aligned}$$

93.

Aufgabe. Es sind alle drei Winkel gegeben, zum Beispiel $A = 40^0\, 56'\, 31'',8$, $B = 139^0\, 48'\, 35'',4$, $C = 31^0\, 12'\, 13'',5$. Man sucht die Seiten.

Auflösung. Nach § 75 hat man:

$$tg\, \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{(-1)\cos\frac{1}{2}S \cdot \cos(\frac{1}{2}S - A)}{\cos(\frac{1}{2}S - B)\cos(\frac{1}{2}S - C)}}$$

$$tg\, \tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}S \cdot \cos(\frac{1}{2}S - B)}{\cos(\frac{1}{2}S - A)\cos(\frac{1}{2}S - C)}}$$

$$tg\, \tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}S \cdot \cos(\frac{1}{2}S - C)}{\cos(\frac{1}{2}S - A)\cos(\frac{1}{2}S - B)}}$$

$A =$	$40^0\, 56'\, 31'',8$	$\frac{1}{2}S =$	$105^0\, 58'\, 40'',4$
$B =$	$139 \cdot 48 \cdot 35,\ 4$	$\frac{1}{2}S - A =$	$65 \cdot 2 \cdot 8,\ 6$
$C =$	$31 \cdot 12 \cdot 13,\ 5$	$\frac{1}{2}S - B =$	$-33 \cdot 49 \cdot 55.$
$S =$	$211^0\, 57'\, 20'',7$	$\frac{1}{2}S - C =$	$74 \cdot 46 \cdot 26,\ 9$

$$\log - \cos\tfrac{1}{2}S = 9{,}4397531 \qquad \log\cos(\tfrac{1}{2}S - B) = 9{,}9194308\ (\S 57)$$

$$\cdots \cos(\tfrac{1}{2}S - A) = 9{,}6253671 \qquad \cdots \cos(\tfrac{1}{2}S - C) = 9{,}4193355$$

$$\overline{19{,}0651202} \qquad \overline{19{,}3387663}$$

$$\underline{19{,}3387663}$$

$$2)\ 0{,}7263539 - 1$$

$$0{,}8631769 - 1$$

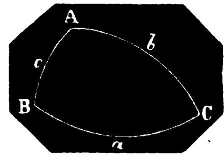
$$\log tg\tfrac{1}{2}a = 9{,}8631769 - 10$$

$$\tfrac{1}{2}a = 36^{0}\,7'\,13''$$

Eben so findet man nach den beiden anderen Formeln $\frac{1}{2}b$ und $\frac{1}{2}c$ und daraus dann: $a = 72^{0}\,14'26''$; $b = 110^{0}\,18'20''$; $c = 48^{0}\,50'42''$.



94.



Aufgabe. Es sind zwei Winkel, A und B, und eine Gegenseite, a, gegeben. Man sucht die andere Gegenseite b.

Auflösung. Aus der Sinus-Regel $\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}$ folgt:

$$\sin b = \frac{\sin a \cdot \sin B}{\sin A}$$

Die Fälle, wo die durch ihren *sinus* gefundene Seite b bestimmt ist, ergeben sich wieder aus § 78, Anmerkung. Es ist nämlich:

1, Wenn $A + B = 180^{0}$, also auch $a + b = 180^{0}$:

$$b \overset{=}{\underset{>}{<}} 90, \text{ wenn } a \overset{=}{\underset{<}{>}} 90$$

2, Wenn $A + B < 180^{0}$, so ist:

$$b < 90, \text{ wenn } a \overset{=}{>} 90$$

Wäre $a < 90^{0}$, so kann b sowohl spitz als stumpf sein etc.

3, Wenn $A+B>180^0$, so ist:

$$b>90, \text{ wenn } a \gtreqless 90$$

Wäre $a>90$, so kann b sowohl spitz als stumpf sein etc.

95.

Aufgabe. Von einem sphärischen Dreieck sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel a, b, C gegeben, zum Beispiel $a=72^0\,14'26''$, $b=110^0\,18'20''$, $C=31^0\,12'13'',5$. Man sucht die übrigen Stücke c, A, B.

Auflösung. In diesem Fall gebraucht man immer die Napier'schen Gleichungen und berechnet zuerst die Winkel A und B. Nach § 79 ist, wenn man, weil $b>a$, um negative Winkel zu vermeiden, a mit b und A mit B verwechselt:

$$tg\frac{B+A}{2}=cot\tfrac{1}{2}C\cdot\frac{cos\frac{b-a}{2}}{cos\frac{b+a}{2}}$$

$$tg\frac{B-A}{2}=cot\tfrac{1}{2}C\cdot\frac{sin\frac{b-a}{2}}{sin\frac{b+a}{2}}$$

$log\ cot\tfrac{1}{2}C=10,5540220$

$\cdot\cdot cos\frac{b-a}{2}=\ 9,9755852$

$20,5296072$

$\cdot\cdot cos\frac{b+a}{2}=\ 8,3466888\ (n)$

$\cdot\cdot tg\frac{B+A}{2}=12,1829184\ (n)$

$log\ cot\tfrac{1}{2}C=10,5540220$

$\cdot\cdot sin\frac{b-a}{2}=\ 9,5133567$

$20,0673787$

$\cdot\cdot sin\frac{b+a}{2}=\ 9,9998928$

$\cdot\cdot tg\frac{B-A}{2}=10,0674859$

$\frac{B+A}{2}=90^0\,22'33'',6$

$\frac{B-A}{2}=49.26.\ 1,8$

mithin:

$A=\ 40^0\,56'31'',8$

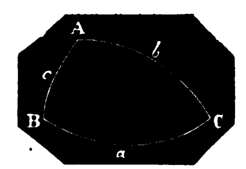
$B=139.48.35,4$

Die Seite c findet man jetzt nach der Sinus-Regel: $\frac{sin\,c}{sin\,C}=\frac{sin\,a}{sin\,A}$, woraus:

$$sin\,c=\frac{sin\,C\cdot sin\,a}{sin\,A}$$

Ob die völlig bestimmte Seite c spitz oder stumpf ist, entscheidet man nach der Regel, dass $a+c$ mit $A+C$ und $b+c$ mit $B+C$ immer gleichartig ist. Hier ist also $c = 48^0\,50'\,42''$. Weil nämlich $A+C < 180$, so muss $c < 90^0$ sein.

96.



Aufgabe. Von einem sphärischen Dreieck, ABC, ist eine Seite, c, und die beiden anliegenden Winkel A, B gegeben; man sucht die übrigen Stücke C, a, b.

Auflösung. In diesem Fall gebrauche man immer die Napier'schen Gleichungen und suche zuerst die beiden Seiten a, b. Man hat:

$$tg\frac{a+b}{2} = tg\,\tfrac{1}{2}c\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$tg\frac{a-b}{2} = tg\,\tfrac{1}{2}c\cdot\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}$$

Den völlig bestimmten Winkel C findet man nun nach der Sinus-Regel, nämlich:

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin a}\sin A = \frac{\sin c}{\sin b}\cdot\sin B$$

Ob C spitz oder stumpf ist, entscheidet man nach der Regel, dass $A+C$ mit $a+c$ und $B+C$ mit $b+c$ gleichartig ist.

97.

Aufgabe. Es sind von vier auf einander folgenden Stücken, A, b, C, a, eines sphärischen Dreiecks zwei Seiten, a, b, und ein Gegenwinkel, A, gegeben, man sucht den andern Winkel C.

Auflösung. Statt den Winkel C vermittelst der Formel:

$$\cot A\cdot\sin C + \cos C\cdot\cos b = \cot a\cdot\sin b$$

direct oder durch Einführung eines Hülfswinkels zu berechnen, ist es bequemer, zuerst nach der Sinus-Regel den zweiten Gegenwinkel B zu suchen, nämlich:

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \cdot \sin A$$

alsdann findet man den Winkel C nach der ersten oder zweiten Napier'schen Formel:

$$\cot \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}} \cdot tg \frac{A-B}{2}$$

Wollte man auch noch die Seite c haben, so ist nach Formel 3 oder 4, § 79:

$$tg \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}} \cdot tg \frac{a-b}{2}$$

Anmerkung. Die Fälle, wo der zuerst zu findende Winkel B bestimmt oder zweideutig ist, ergeben sich daraus, dass $A+B$ mit $a+b$ gleichartig ist.

Will man aber zuerst C mittelst eines Hülfswinkels, φ, nach der Formel:

$$\cot A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b = \cot a \cdot \sin b$$

berechnen, so verfahre man nach § 65.

Aus vorstehender Gleichung folgt:

$$\frac{\cot A}{\cos b} \cdot \sin C + \cos C = \cot a \cdot tg\, b$$

setzt man nun: $\frac{\cot A}{\cos b} = \cot \varphi$, so hat man, weil $\cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$

$$\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cdot \sin C + \cos C = \cot a \cdot tg\, b$$

$$\sin C \cdot \cos \varphi + \cos C \sin \varphi = \cot a \cdot tg\, b \cdot \sin \varphi$$

$$\sin (C + \varphi) = \cot a \cdot tg\, b \cdot \sin \varphi$$

Diese Formel ist dann brauchbar, wenn man, wie es in der Praxis der Fall ist, im Voraus weiss, ob $\widehat{C}$ spitz oder stumpf ist.

98.

Aufgabe. Von vier auf einander folgenden Stücken, A, b, C, a, eines sphärischen Dreiecks sind zwei Winkel, A, C, und eine Gegenseite, a, gegeben, man sucht die zwischen liegende Seite b.

Auflösung. Man hat aus:

$$\cot A \sin C + \cos C \cdot \cos b = \cot a \cdot \sin b$$

$$\cot a \cdot \sin b - \cos C \cdot \cos b = \cot A \cdot \sin C$$

$$\frac{\cot a}{\cos C} \cdot \sin b - \cos b = \cot A \cdot tg\, C$$

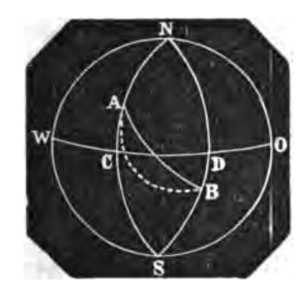
$$\cot \varphi \cdot \sin b - \cos b = \cot A \cdot tg\, C$$

$$\cos \varphi \cdot \sin b - \cos b \cdot \sin \varphi = \cot A \cdot tg\, C \cdot \sin \varphi$$

$$\sin (b - \varphi) = \cot A \cdot tg\, C \cdot \sin \varphi$$

worin φ durch $\cot \varphi = \frac{\cot a}{\cos C}$ gegeben.

99.



Aufgabe. Es sind die geographischen Breiten und Längen zweier Oerter, A und B, auf der Erde gegeben, nämlich AC $= b$, BD $= -b'$; WC $= l'$, WD $= l$, man sucht die Entfernung der beiden Oerter A und B, d. h. den zwischen ihnen enthaltenen Bogen grössten Kreises $\widehat{AB} = x$.

Auflösung. Denkt man durch A und B die beiden Meridiane NAS, NBS gezogen, so entsteht das sphärische Dreieck ANB, in welchem der Winkel N $= l - l'$, die Seite AN $= 90 - b$ und die Seite BN $= 90 + b'$. Ietzt kann man nach § 95 verfahren.

Will man aber die Seite $AB = x$ mittelst eines Hülfswinkels, φ, berechnen, so folgt aus:

$$\cos N = \frac{\cos AB - \cos AN \cdot \cos BN}{\sin AN \cdot \sin BN}$$

$$\cos(l - l') = \frac{\cos x - \cos(90 - b) \cdot \cos(90 + b')}{\sin(90 - b) \cdot \sin(90 + b')}$$

$$\cos(l - l') = \frac{\cos x + \sin b \sin b'}{\cos b \cdot \cos b'}$$

$$\cos x = \cos(l - l') \cdot \cos b \cdot \cos b' - \sin b \cdot \sin b'$$

$$\cos x = \cos(l - l') \cdot \cos b' \left(\cos b - \frac{\sin b \sin b'}{\cos(l - l') \cos b'}\right)$$

$$\cos x = \cos(l - l') \cdot \cos b' \left(\cos b - \sin b \cdot \frac{tg\, b'}{\cos(l - l')}\right)$$

$$\cos x = \cos(l - l') \cdot \cos b' \cdot (\cos b - \sin b \cdot tg\, \varphi)$$

$$\cos x = \cos(l - l') \cdot \cos b' \left(\frac{\cos b \cos \varphi - \sin b \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi}\right)$$

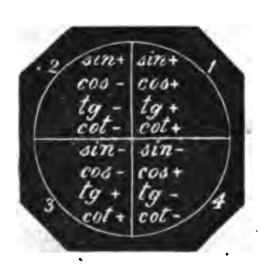
$$\cos x = \cos(l - l') \cdot \cos b' \cdot \cos(b + \varphi) \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$$

worin: $tg\, \varphi = \frac{tg\, b'}{\cos(l - l')}$

Die für x gefundenen Grade, Minuten etc. verwandelt man nun in Länge, indem man auf einen Grad grössten Kreises 15 geographische Meilen rechnet.

Anmerkung. Dass ein zwischen zwei Puncten, A, B, enthaltener Bogen grössten Kreises kleiner ist, als ein durch dieselben Puncte gelegter Bogen kleineren Kreises, erhellt leicht, wenn man den Bogen kleineren Kreises um die gemeinschaftliche Sehne gedreht und mit dem Bogen grössten Kreises in einerlei Ebene gebracht denkt, wo dann letzterer, weil mit einem grössern Radius beschrieben, vom erstern offenbar umgeben, folglich auch kleiner sein muss.

100.



Zusammenstellung der wichtigsten goniometrischen Formeln.

$\sin 0 = 0$	$\sin 90 = 1$
$\cos 0 = 1$	$\cos 90 = 0$
$tg\, 0 = 0$	$tg\, 90 = \infty$
$\cot 0 = \infty$	$\cot 90 = 0$

$\sin 180 = 0 \qquad \sin 270 = -1 \qquad \sin 360 = 0$

$\cos 180 = -1 \qquad \cos 270 = 0 \qquad \cos 360 = 1$

$\sin 2k\pi = 0 \qquad \sin(2k+1)\pi = 0 \qquad \sin(-a) = -\sin a$

$\cos 2k\pi = 1 \qquad \cos(2k+1)\pi = -1 \qquad \cos(-a) = \cos(+a)$

$\sin(90-a) = \cos a \qquad \sin(180-a) = \sin a$

$\cos(90-a) = \sin a \qquad \cos(180-a) = -\cos a$

$tg(90-a) = \cot a \qquad tg(180-a) = -tg\, a$

$\cot(90-a) = tg\, a \qquad \cot(180-a) = -\cot a$

$\sin(90+a) = \cos a \qquad \sin(180+a) = -\sin a$

$\cos(90+a) = -\sin a \qquad \cos(180+a) = -\cos a$

$\sin(270+a) = -\cos a \qquad \sin(360+a) = \sin a$

$\cos(270+a) = \sin a \qquad \cos(360+a) = \cos a$

$\sin(45+a) = \cos(45-a) \qquad \sin 30 = \frac{1}{2} = \cos 60$

$\cos(45+a) = \sin(45-a) \qquad \sin 60 = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \cos 30$

$\sin 45 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \cos 45 \qquad tg\, 45 = 1 = \cot 45$

* 1. $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad \sin^2 a = 1 - \cos^2 a$

* 2. $\dfrac{\sin a}{\cos a} = tg\, a \qquad \cos^2 a = 1 - \sin^2 a$

* 3. $\dfrac{\cos a}{\sin a} = \cot a \qquad tg\, a = \dfrac{1}{\cot a}$

* 4. $tg\, a \cdot \cot a = 1 \qquad \cot a = \dfrac{1}{tg\, a}$

5. $\sin a = \sqrt{1-\cos^2 a} = \dfrac{tg\, a}{\sqrt{1+tg^2 a}} \left(= \dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 a}}\right)$

6. $\cos a = \sqrt{1-\sin^2 a} = \dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2 a}} \left(= \dfrac{\cot a}{\sqrt{1+\cot^2 a}}\right)$

7. $1 + tg^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a}$

8. $1 + \cot^2 a = \dfrac{1}{\sin^2 a}$

* 9. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

* 10. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

* 11. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

* 12. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

* 13. $tg(a+b)=\dfrac{tg\,a+tg\,b}{1-tg\,a\cdot tg\,b}$

* 14. $tg(a-b)=\dfrac{tg\,a-tg\,b}{1+tg\,a\cdot tg\,b}$

15. $cot(a\pm b)=\dfrac{cot\,a\cdot cot\,b\mp 1}{cot\,b\pm cot\,a}$

16. $sin\,2a=2\cdot sin\,a\cdot cos\,a$

* $sin\,a=2\cdot sin\tfrac{1}{2}a\cdot cos\tfrac{1}{2}a$

17. $cos\,2a=cos^2 a-sin^2 a=1-2sin^2 a=2cos^2 a-1$

$cos\,a=cos^2\tfrac{1}{2}a-sin^2\tfrac{1}{2}a$

18. $sin\,3a=3sin\,a-4sin^3 a$

19. $tg\,2a=\dfrac{2\,tg\,a}{1-tg^2 a}$

20. $tg\,a=\dfrac{2\,tg\tfrac{1}{2}a}{1-tg^2\tfrac{1}{2}a}$

* 21. $1-cos\,a=2sin^2\tfrac{1}{2}a$

* 22. $1+cos\,a=2cos^2\tfrac{1}{2}a$

23. $tg\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\dfrac{1-cos\,a}{1+cos\,a}}=\dfrac{sin\,a}{1+cos\,a}=\dfrac{1-cos\,a}{sin\,a}$

24. $tg\,(45-b)=\dfrac{1-tg\,b}{1+tg\,b}$

25. $tg\,(45+b)=\dfrac{1+tg\,b}{1-tg\,b}$

26. $sin\,a+cos\,a=sin\,(45+a)\cdot\sqrt{2}$ ..... (§ 51)

27. $cos\,a-sin\,a=sin\,(45-a)\cdot\sqrt{2}$

28. $sin(45+a)=cos(45-a)$

29. $cos(45+a)=sin(45-a)$

30. $sin\,p+sin\,q=2sin\dfrac{p+q}{2}\cdot cos\dfrac{p-q}{2}$

31. $sin\,p-sin\,q=2cos\dfrac{p+q}{2}\cdot sin\dfrac{p-q}{2}$

32. $cos\,p+cos\,q=2cos\dfrac{p+q}{2}\cdot cos\dfrac{p-q}{2}$

33. $cos\,q-cos\,p=2sin\dfrac{p+q}{2}\cdot sin\dfrac{p-q}{2}$

34. $\dfrac{sin\,p-sin\,q}{sin\,p+sin\,q}=\dfrac{tg\dfrac{p-q}{2}}{tg\dfrac{p+q}{2}}$

35. $1 + \sin q = 2 \cdot \sin^2 (45 + \frac{1}{2}q) = 2 \cos^2 (45 - \frac{1}{2}q)$

36. $1 - \sin q = 2 \cos^2 (45 + \frac{1}{2}q) = 2 \cdot \sin^2 (45 - \frac{1}{2}q)$

37. $\frac{1 - \cos a}{\cos a} = tg\, a \cdot tg \frac{1}{2} a$

38. $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \sin (a + b) + \frac{1}{2} \sin (a - b)$ ...... (§ 52)

39. $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} \cos (a - b) - \frac{1}{2} \cos (a + b)$

40. $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cos (a + b) + \frac{1}{2} \cos (a - b)$

41. $arc \sin x \pm arc \sin y = arc \sin (x\sqrt{1 - y^2} \pm y\sqrt{1 - x^2})$

42. $arc \cos x \pm arc \cos y = arc \cos (xy \mp \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)})$

43. $arc\; tg\, x \pm arc\; tg\, y = arc\; tg \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$

44. $arc \cot x \pm arc \cot y = arc \cot \frac{xy \mp 1}{y \pm x}$

Pierer'sche Hofbuchdruckerei. Stephan Geibel & Co. in Altenburg.

Ausführliches

Lehrbuch der Analysis,

zum

Selbstunterricht

mit Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens

bearbeitet

von

H. B. Lübsen.

Sechste verbesserte Auflage.

Leipzig.
Friedrich Brandstetter.
1873.

Vorwort zur ersten Auflage.

Die Wissenschaft, welche den Titel „Analysis“ führt, kann als eine Fortsetzung der Algebra und zugleich als eine Brücke zur Differential- und Integral-Rechnung betrachtet werden. Ihr Inhalt ist, wie der der Algebra, so mannichfaltig, dass es auch hier unmöglich ist, denselben in wenigen Worten zusammenzufassen oder eine bestimmte Definition von dem Worte Analysis zu geben. Was dies Wort bezeichnet, kann man nur nach und nach erfahren.

Zu ihren Resultaten führen indessen mehrere sehr verschiedene Methoden. Wir haben diejenige gewählt, welche uns für den ersten Anfänger und zum Selbstunterricht, wozu dies Werk bestimmt ist, am geeignetsten schien.

Wer jedoch die Mathematik nicht als Mittel, sondern als Zweck betrachtet, wird schon von selbst nicht unterlassen, sich auch mit den übrigen, namentlich mit der Cauchy'schen Methode, bekannt zu machen.

Hamburg, im Juni 1853.

Lübsen.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Bei dieser neuen Auflage sind die Druckfehler in der alten beseitigt und neue möglichst vermieden; ausserdem hat sie einige Zusätze erhalten und ist namentlich auch der Beweis mit aufgenommen: dass jede algebraische Gleichung *n*ten Grades sich in *n* einfache Factoren zerlegen lässt.

Hamburg, im Februar 1860.

Lübsen.

Erstes Buch.

Combinationslehre.

Einleitung.

1.

Die Combinationslehre ist die Wissenschaft von den Gesetzen, nach welchen eine Anzahl gegebener Dinge sich ordnen und verbinden lässt. Sie hat als solche nicht allein ein rein wissenschaftliches, sondern auch ein practisches Interesse, indem sie bei verschiedenen mathematischen Untersuchungen sehr oft Anwendung findet, namentlich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wo man das Reich der Möglichkeiten durchsucht und dessen Grenze bestimmt, dann auch in der Kunst zu beobachten und eine Reihe nothwendiger Versuche in gehöriger Ordnung und Verbindung anzustellen.

2.

Um den oben ausgesprochenen Begriff der Combinationslehre und das, was man unter Ordnen und Verbinden versteht, noch etwas deutlicher zu bezeichnen und zugleich die Hauptfragen, deren Beantwortung sie lehren soll, zuerst hervorzuheben, so wie um die nothwendigen Zeichen und Kunstwörter festzusetzen, mögen folgende Beispiele als Vorbereitung dienen.

3.

Es sei die Aufgabe gegeben: Alle möglichen vierziffrigen Zahlen darzustellen, welche sich mit den vier Ziffern 1, 2, 3, 4 schreiben lassen.

Einige der hier geforderten Zahlen darzustellen, ist offenbar leicht. Verschieden sind z. B. schon die Zahlen 1234, 1243, 1423, 3124 &c. Allein man sieht wohl, worauf es ankommt, um *alle möglichen* zu erhalten, nämlich eine allgemeine Methode zu erfinden, nach welcher man eine Anzahl Dinge (welche wir in der Folge kurzweg *Elemente* nennen und der leichtern Uebersicht halber mit Ziffern bezeichnen wollen) in allen möglichen verschiedenen Folgen (Nebeneinandersein) hinschreiben kann, oder, was dasselbe ist, in einer Gruppe von Dingen (Elementen), z. B. in 1, 2, 3, 4, die Plätze derselben auf alle mögliche Weise zu verwechseln. Derjenige Theil der Combinationslehre, welcher diese Art Aufgaben lösen, nämlich alle möglichen Versetzungen (Permutationen) einer bestimmten Anzahl Elemente angeben lehrt, heisst *Permutation* und durch die Bezeichnung P (1, 2, 3, 4) wird die hier in Worten ausgesprochene Forderung kurz angedeutet.

4.

Es sei ferner die Aufgabe gegeben: Alle möglichen Verbindungen (Combinationen) darzustellen, welche sich aus einer gegebenen Anzahl Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6 (z. B. Sauerstoff, Wasserstoff, Stickstoff, Kohle, Schwefel &c.) machen lassen, indem man je zwei, oder je drei &c. Elemente verbindet, oder wie es in der Kunstsprache heisst, zur zweiten, dritten Classe &c. combinirt und welche Forderung in Zeichen durch $\overset{2}{C}$ (1, 2, 3, 4, 5, 6), $\overset{3}{C}$ (1, 2, 3, 4, 5, 6) angedeutet wird.

Einige dieser verschiedenen Combinationen aus den sechs Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6 lassen sich offenbar leicht bilden. Zur zweiten Classe hätte man unter andern z. B. 12, 13, 16, 23, 35 &c. und zur dritten Classe z. B. 123, 124, 136, 345 &c. Derjenige Theil der Combinationslehre, welcher diese Art Aufgaben lösen lehrt und ein allgemeines Verfahren angiebt, alle an Inhalt verschiedenen Combinationen zu einer bestimmten Classe darzustellen, so wie auch eine allgemeine Regel aufstellt, ihre Anzahl im Voraus zu berechnen, heisst *Combination*.

Hierbei dürfen also keine Permutationen vorkommen, und Formen, wie 123, 132, 213 z. B. wären also, weil sie ganz dieselben Elemente enthalten, an Inhalt gleich und nur für eine zu rechnen.

5.

Es sei endlich noch die Aufgabe gegeben: Aus mehreren verschiedenen Reihen Elemente alle möglichen Combinationen so zu bilden, dass jede der verschiedenen Combinationen aus jeder Reihe ein Element enthält, z. E. eine Reihe verschiedener Säuren A, B, C, D..... mit einer Reihe verschiedener Basen *a*, *b*, *c*... zu verbinden, so dass jede der möglichen Combinationen eine Säure und eine Base enthält.

Diese dritte Aufgabe ist offenbar darin von der vorhergehenden zweiten Aufgabe (§ 4) sehr verschieden, weil dort die Elemente aus einer und derselben Reihe, hier aber die Elemente aus verschiedenen Reihen mit einander verbunden werden sollen. Zur Unterscheidung nennt man deshalb auch den Theil der Combinationslehre, welcher diese letztere Art Aufgabe zu behandeln, d. h. eine Methode und eine Regel aufzustellen hat, nach welcher man alle möglichen Verbindungen dieser Art darstellen und ihre Anzahl im Voraus berechnen kann, Variation.*)

Einige der verschiedenen Verbindungen (Variationen) aus den beiden obigen Reihen A, B, C, D..und *a*, *b*, *c*, *d*..wären z. B. A*a*, A*b*, A*c*..., B*a*, B*b* &c. Bei der Variation ist der Grad der Classe offenbar durch die Zahl der verschiedenen Reihen bestimmt.

6.

Hiemit hätten wir nun die Hauptfragen der Combinationslehre, welche die folgenden in Aufgaben gekleideten §§ beantworten sollen, zuerst hervorgehoben und mit dem Anfänger

*) Dies Wort, Variation, ist freilich nicht bezeichnend und schon deshalb sehr unpassend gewählt, weil es später in einem ganz andern Sinne zur Bezeichnung des höchsten Theils der Infinitesimalrechnung gebraucht wird.

besprochen. Und da dieser nun gehörig vorbereitet ist und weiss, worauf es ankommt, so möge er jetzt versuchen, die folgenden Aufgaben selbstständig zu lösen und diese Wissenschaft selber zu erfinden.

Permutation.

7.

Aufgabe. Ein Verfahren anzugeben, nach welchem man alle möglichen Permutationen einer gegebenen Anzahl Elemente, z. B. P (1, 2, 3, 4), darstellen kann.

Auflösung. Die bequemste Regel scheint folgende zu sein: Man schreibe die mit Ziffern (Zeigern) bezeichneten Elemente erst in natürlicher (arithmographischer) Folge hin, so erhält man die niedrigste Form, hier also: 1234. Durchlaufe diese erhaltene Form rückwärts, bis man an ein niedrigeres Element kommt, setze an dessen Stelle das darauf folgende höhere (oder wenn mehrere höhere folgen, das nächst höhere) und lasse hierauf die durchlaufenen (das verdrängte mitgerechnet) in natürlicher Ordnung folgen. Diese einfache Regel wird für jede erhaltene Form so oft wiederholt, bis alle Permutationen zum Vorschein gekommen. Aus P (1, 2, 3, 4) hat man zuerst die niedrigste Form 1234. Weil nun 3 niedriger als 4, so ist die nächst höhere Form 1243. Durchläuft man diese wieder rückwärts, so kommt man erst bei 2 an ein niedrigeres Element; setzen wir an dessen Stelle das nächst höhere der beiden durchlaufenen, so folgt aus der Form 1243 die nächst höhere 1324 &c., nämlich:

P (1, 2, 3, 4)

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Dass man auf diese Weise alle möglichen Permutationen sicher erhält, ergiebt sich daraus, weil man allmälig von der niedrigsten Form bis zur höchsten aufsteigt, worauf die Regel nicht mehr angewandt werden und mithin auch keine mögliche Form fehlen kann.

8.

Formen, welche dasselbe Anfangs-Element haben, rechnet man zu einerlei Ordnung. Vorstehendes Beispiel giebt also vier verschiedene Ordnungen, weil offenbar jedes Element gleich oft an die Spitze zu stehen kommt.

9.

Aufgabe. Eine allgemeine Regel oder Formel zu finden, nach welcher man die Anzahl aller möglichen Permutationen aus n Elementen im Voraus berechnen kann.

Auflösung 1. Ein Element (1) giebt keine Versetzung, kommt aber ein zweites (2) hinzu, so kann dieses jenem auf zwei verschiedene Weisen zugesellt, nämlich nach- und auch vorgesetzt werden; mithin geben zwei Elemente zwei Permutationen 12, 21. Kommt noch ein drittes Element (3) hinzu, so kann dieses jeder der beiden vorhergehenden Formen auf drei verschiedene Weisen zugesellt, nämlich nach-, zwischen- und vorgesetzt werden. Drei Elemente geben also $2.3 = 1.2.3 = 6$ Permutationen. Ein viertes Element (4) findet bei jeder der vorhergehenden 6 Permutationen vier verschiedene Plätze. Vier Elemente geben also $1.2.3.4 = 24$ Permutationen. Setzt man diese Schlussreihe fort und bezeichnet die Anzahl Permutationen aus n Elementen mit P_n, so findet man leicht, dass ganz allgemein:

$$P_n = 1.2.3.4\ldots.n$$

Auflösung 2. Weil jedes der n Elemente gleich oft an die Spitze kommt (§ 8), so erhält man die Anzahl der Permutationen aus n Elementen offenbar auch, indem man die

Anzahl der Permutationen aus $n - 1$ Elementen mit n multiplicirt, weil es n verschiedene Ordnungen geben muss. In Zeichen:

$$P_n = n . P_{n-1}.$$

$P_n = n P_{n-1}$

Setzt man nun in diese Formel nach und nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ so hat man, weil $P_1 = 1$,

$$P_2 = 2 . P_1 = 2 . 1$$
$$P_3 = 3 . P_2 = 3 . 2 . 1$$
$$P_4 = 4 . P_3 = 4 . 3 . 2 . 1$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$P_n = n . P_{n-1} = n . n - 1 . n - 2 \ldots 3 . 2 . 1 .$$

10.

Sind unter den zu permutirenden Elementen mehrere gleiche, wie es häufig der Fall ist, so leuchtet ein, dass die Anzahl der möglichen Permutationen nicht so gross sein kann, als wenn die Elemente alle verschieden wären, weil die Plätze-Vertauschung gleicher Elemente keine Formveränderung hervorbringt. Es fragt sich nun, wie man in solchem Falle die Anzahl der möglichen verschiedenen Formen im Voraus berechnen kann. Das Verfahren, sie wirklich darzustellen, bleibt dasselbe, wie in § 8. So giebt z. B. P (1, 1, 1, 2, 2, 3):

111223	$1_1 1_2 1_3 223$
111232	$1_1 1_3 1_2 223$
111322	$1_2 1_1 1_3 223$
112123	$1_2 1_3 1_1 223$
112132	$1_3 1_1 1_2 223$
112213	$1_3 1_2 1_1 223$
112231	———
112312	$1_1 1_2 1_3 2_1 2_2 3$
112321	$1_1 1_2 1_3 2_2 2_1 3$

u. s. w.

Nennen wir die Anzahl der verschiedenen Permutations-Formen x, so ist klar, dass, wenn in jeder dieser x verschie-

denen Formen die drei gleichen Elemente (1, 1, 1) verschieden würden, dann auch durch Permutation derselben statt jeder der x Formen $1.2.3 = 6$mal so viel kommen würden (wie es für die niedrigste Form 111223 in nebenstehender Reihe angedeutet worden). Würden in jeder dieser verschiedenen $1.2.3.x$ Formen auch noch die zwei gleichen Elemente (2, 2) verschieden, so würden aus jeder der $1.2.3.x$ Formen noch $1.2 = 2$mal so viel hervorgehen. Dann müsste man offenbar so viele Formen erhalten, als wenn alle sechs Elemente verschieden wären. Daher ist (§ 9):

$$1.2.1.2.3.x = 1.2.3.4.5.6.$$
$$x = 60.$$

Ist allgemein n die Anzahl aller Elemente und darunter einmal p, einmal q und einmal r gleiche, so ist die Anzahl aller möglichen Permutationen:

$$P_n = \frac{1.2.3.4 \ldots\ldots\ldots\ldots (n-1)n}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots r}$$

Combination.

11.

Aufgabe. Ein Verfahren anzugeben, nach welchem man aus einer gegebenen Anzahl verschiedener Elemente alle möglichen verschiedenen Combinationen zu einer bestimmten Classe bilden kann; z. B. $\overset{3}{C}$ (1, 2, 3, 4, 5, 6).

Auflösung. Man stelle so viele der niedrigsten Elemente in natürlicher Folge zusammen, als der Exponent der Classe Einheiten hat. Aus der erhaltenen niedrigsten Form leite man successive die nächst höheren ab, indem man in die letzte Stelle nach und nach die noch vorhandenen höheren Elemente nach ihrer Aufeinanderfolge setzt. Lässt sich in die letzte Stelle kein höheres Element mehr setzen, so muss man erst

die vorletzte (vorvorletzte &c.) Stelle erhöhen und dann wieder wie vorhin verfahren, so dass nie ein niedrigeres Element auf ein höheres folgt und auch keine Permutation Statt findet. Alsdann müssen alle an Inhalt verschiedenen Combinationen auf diese Weise sogleich geordnet zum Vorschein kommen. So ist z. B.:

$\overset{1}{C}(1,2,3,4,5,6)$

1,2,3,4,5,6

$\overset{2}{C}(1,2,3,4,5,6)$

12	23	34	45	56
13	24	35	46	
14	25	36		
15	26			
16				

$\overset{3}{C}(1,2,3,4,5,6)$

123	234	345	456
124	235	346	
125	236	356	
126	245		
134	246		
135	256		
136			
145			
146			
156			

$\overset{4}{C}(1,2,3,4,5,6)$

1234	2345	3456
1235	2346	
1236	2356	
1245	2456	
1246		
1256		
1345		
1346		
1356		
1456		

$\overset{5}{C}(1,2,3,4,5,6)$

12345	23456
12346	
12356	
12456	
13456	

$\overset{6}{C}(1,2,3,4,5,6)$

123456

12.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man die Anzahl aller möglichen Combinationen zu einer bestimmten Classe aus einer gegebenen Reihe verschiedener Elemente im Voraus berechnen kann.

Auflösung. Nehmen wir zuerst an, man habe 6 Elemente, so ist klar, dass es nur 6 Combinationen zur ersten Classe giebt. Zu jedem dieser 6 Elemente lässt sich jedes der 5 übrigen setzen, was dann $6.5 = 30$ Verbindungen (Arrangements) zur zweiten Classe giebt. Da nun aber kein Element vor dem andern einen Vorzug hat, sondern alle auf gleiche Weise in die Verbindungen eintreten, mithin jedes Element gleich oft vor und nach zu stehen kommen muss, so sind diese 6.5 Verbindungen offenbar je zwei an Inhalt gleich oder permutirt. Man hat z. B. 12 und auch 21; 13, 31; 14, 41 &c. Nennen wir also die Anzahl der wirklichen, an Inhalt verschiedenen Combinationen aus 6 Elementen zur zweiten Classe x, so geben diese $1.2\,x$ Permutationen und weil dann $1.2.x = 6.5$ sein muss, so ist $x = \frac{6.5}{1.2} = 15$.

Jede der 6.5 permutirten Combinationen aus den 6 Elementen zur zweiten Classe lässt sich mit jedem der 4 übrigen Elemente verbinden, was $6.5.4$ Verbindungen zur dritten Classe giebt. Da nun aber in diesen Verbindungen jedes Element nothwendig wieder auf gleiche Weise vorkommen, d. h. gleich oft vor, in der Mitte und am Ende stehen muss, so erscheint hier jede Combination in allen ihren Permutationsformen. Nennt man also die Anzahl der wirklich verschiedenen Combinationen aus 6 Elementen zur dritten Classe x, so ist, weil jede derselben $1.2.3$ Permutationen giebt, $1.2.3.x = 6.5.4$. Daher $x = \frac{6.5.4}{1.2.3}$.

Setzt man diese Schlussreihe fort, so ergiebt sich die Anzahl der Combinationen aus 6 Elementen zur vierten Classe $= \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}$; zur fünften Classe $= \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}$ und allgemein die Anzahl der Combinationen aus n Elementen zur $m$ten Classe

$$\overset{m}{C}_n = \frac{n.(n-1)(n-2)\ldots(n-[m-1])}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\ldots m}$$

13.

Die vorhergehende Formel lässt sich auch auf folgende Weise finden:

Denkt man sich die Reihe der zu combinirenden Elemente, z. B. $\overset{3}{C}(1,2,3,4,5,6,7)$, durch einen Einschnitt in zwei Gruppen getheilt, wovon die erste so viele Elemente enthält, als der Exponent der Classe Einheiten hat, und verfährt dann ganz nach der §. 11 gegebenen Combinations-Regel, nur mit dem Unterschiede, dass man (gerade wie bei der Permutation) jedesmal die übrigen Elemente in natürlicher Ordnung in der zweiten Columne folgen lässt, so erhält man offenbar nicht allein die Combinationen zur dritten Classe, sondern zugleich auch die Combinationen zur 7—3 = 4ten Classe, jedoch in umgekehrter Ordnung der Vorschrift. Auf die erste niedrigste Form linker Seite folgt die höchste Form rechter Seite, dann auf die nächst höhere linker Hand die nächst niedrigere rechter Hand &c. bis zur höchsten und niedrigsten beiderseits, und es ist klar, dass aus diesem Grunde alle möglichen Combinationen zur dritten und vierten Classe aus den 7 Elementen nothwendig zum Vorschein kommen müssen.

123	4567	237	1456
124	3567	245	1367
125	3467	246	1357
126	3457	247	1356
127	3456	256	1347
134	2567	257	1346
135	2467	267	1345
136	2457	345	1267
137	2456	346	1257
145	2367	347	1256
146	2357	356	1247
147	2356	357	1246
156	2347	367	1245
157	2346	456	1237
167	2345	457	1236
234	1567	467	1235
235	1467	567	1234
236	1457		

Was nun ihre Anzahl anbetrifft, so sei diese $= x$. Denkt man sich die Combinationen diesseits des Striches sämmtlich permutirt, so würde man offenbar $1.2.3$mal so viel, also $1.2.3.x$ Formen von 7 Elementen erhalten. Denkt man sich in diesen $1.2.3.x$ Formen auch noch die, je vier verschiedenen, Elemente hinter dem Striche permutirt, so giebt dies wieder $1.2.3.4$mal so viel, mithin $1.2.3.4.1.2.3.x$. Diese Anzahl muss nun aber mit der Anzahl aller Permutationen aus 7 Elementen übereinstimmen. Daher:

$$1.2.3.4.1.2.3.x = 1.2.3.4.5.6.7;$$

woraus;

$$x = \frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.3.4.1.2.3} = \frac{7.6.5}{1.2.3} = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$$

Allgemein, die Anzahl aller Combinationen zur $m$ten Classe aus n Elementen ist:

$$= \frac{1.2.3.4\ldots(n-m)(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-1)n}{1.2.3.4\ldots(n-m)\ .\ 1\ .\ 2\ \ldots\ldots m}$$

$$\text{oder } \overset{m}{C}_n = \frac{n.(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots m}.$$

Anmerkung. Aus den vorhergehenden Betrachtungen hat sich zugleich ergeben, dass aus n Elementen eben so viele Combinationen zur $m$ten, als zur $(n-m)$ten Classe möglich sind.

Combinationen mit Wiederholung.

14.

Ausser der im vorigen § erwähnten Combination kommt es auch vor, eine Reihe Elemente zu einer bestimmten Classe so zu combiniren, dass jedes der Elemente in derselben Form bis so oft wiederholt (mit sich selbst verbunden) werden darf, als der Exponent der Classe Einheiten hat. Man nennt dies Combination mit Wiederholung und deutet sie durch das Zeichen C' an. Dies ist dann ganz dasselbe, als wenn man in der Reihe der zu combinirenden Elemente jedes Element so oft vorhanden denkt, als der Classen-Exponent Einheiten hat, so dass also $\overset{3}{C}'(1,2,3,4,) = \overset{3}{C}(1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4)$, mithin nur eine kürzere Schreibart.

15.

Aufgabe. Eine Regel anzugeben, nach welcher man die Combinationen mit Wiederholung, z. B. $\overset{4}{C}'(1,2,3,4,5)$ darstellen kann.

Auflösung. Die Regel ist hier ganz dieselbe, wie bei der Combination ohne Wiederholung. Man schreibt nämlich das niedrigste Element so oft hin, als der Classen-Exponent Einheiten hat; setzt dann in die letzte Stelle successive die nächst höhern Elemente aus der gegebenen Reihe. Eben so verfährt man mit der vorletzten, vorvorletzten Stelle &c., indem man aber die darauf folgenden Stellen nicht mit den nächst höhern, sondern mit demselben Element (weil es wiederholt werden darf) besetzt. Auf diese Weise erhält man aus der niedrigsten Form erst die nächst höhere, aus dieser wiederum die nächst höhere &c. bis zur höchsten Form und mithin alle möglichen Formen in den verschiedenen Ordnungen *a, b, c, d, e.* (Die Bedeutung der mit α, β, γ, δ, ε bezeichneten Columnen wird der folgende § geben.)

$\overset{4}{C'}(1,2,3,4,5)$

a	α	*b*	β	*c*	γ	*d*	δ	*e*	ε
1111	1234	2222	2345	3333	3456	4444	4567	5555	5678
1112	1235	2223	2346	3334	3457	4445	4568		
1113	1236	2224	2347	3335	3458	4455	4578		
1114	1237	2225	2348	3344	3467	4555	4678		
1115	1238	2233	2356	3345	.				
1122	1245	2234	.	3355	.				
1123	1246	2235	.	3444	.				
1124	.	2244	.	3445	.				
1125	.	2245	.	3455	.				
1133	.	2255	.	3555	3678				
1134	.	2333	.						
1135	.	2334	.						
1144	.	.	.						
1145	.	.	.						
1155	.	.	.						
1222	.	2555	2678						
1223	.								
.	.								
.	.								
1555	1678								

16.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man die Anzahl aller Combinationen mit Wiederholung aus n Elementen zur $m$ten Classe berechnen kann.

Auflösung. Man denke sich alle Combinationen mit Wiederholungen, z. B. $\overset{4}{C'}$ (1,2,3,4,5), wirklich hingeschrieben und folgende Veränderung damit vorgenommen: Das Anfangs-Element bleibe in jeder Combination unverändert, die zweite Stelle aber werde um eine Einheit, die dritte Stelle um zwei Einheiten &c. erhöht, wie in § 15 durch die neben a, b, c, d, e stehenden Reihen α, β, γ, δ, ε angedeutet, so erhellet leicht, dass dadurch aus den Combinationen mit Wiederholung nothwendig just so viele Combinationen ohne Wiederholung zu derselben Classe hervorgehen müssen, jedoch aus so vielen Elementen mehr, als der Exponent der Classe Einheiten hat, weniger eins. So geben z. B. 5 Elemente zur vierten Classe mit Wiederholung just so viele Combinationen, als $5 + 3 = 8$ Elemente zur vierten Classe ohne Wiederholung, nämlich: $\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 70$. (§ 12.)

Ferner geben 20 Elemente zur fünften Classe mit Wiederholung so viele Combinationen, als $20 + 4 = 24$ Elemente zu derselben Classe ohne Wiederholung, nämlich: $\frac{24.23.22.21.20}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4\;.\;5}$.
Allgemein: n Elemente zur $m$ten Classe mit Wiederholung geben so viele Combinationen, als $n + m - 1$ Elemente zur $m$ten Classe ohne Wiederholung. Also in Zeichen:

$$\overset{m}{C'_n} = \frac{(n+m-1)\;(n+m-2)\ldots n}{1\;.\;2\;\ldots m}$$

oder so geschrieben:

$$\overset{m}{C'_n} = \frac{n.(n+1).(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\ldots m}$$

Variation.

17.

Sind mehrere verschiedene Reihen Elemente gegeben und sollen aus ihnen alle möglichen verschiedenen Verbindungen so dargestellt werden, dass jede Verbindung ein Element aus jeder Reihe enthält, also weder Wiederholung noch Permutation Statt finden darf, so nennt man, wie schon in der Einleitung erwähnt, eine solche Art Combination aus mehreren Reihen: Variation. Der Exponent der Classe ist also hiebei durch die Anzahl der gegebenen Reihen im Voraus bestimmt.

18.

Aufgabe. Ein Verfahren anzugeben, nach welchem man alle möglichen Variationen aus einer gegebenen Anzahl Reihen, z. B. aus den drei: A, B, C, D; a, b, c, d und α, β, γ, δ, darstellen kann.

Auflösung. Man stelle die gegebenen Reihen unter einander:

$$\begin{matrix} A, & B, & C, & D \\ a, & b, & c, & d \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta \end{matrix}$$

Die Anfangs-Elemente der Reihen zusammengestellt, geben die niedrigste Form, nämlich $A a \alpha$. Hieraus folgen nach und nach die nächst höhern Formen, indem man in die letzte Stelle successive die nächst höhern Elemente der letzten Reihe setzt, bis dieselbe ganz erschöpft ist. Hierauf wird die vorletzte Stelle durch das nächst höhere Element der bezüglichen (vorletzten) Reihe, die letzte Stelle aber wieder mit dem Anfangs-Element der letzten Reihe besetzt &c., wie nachfolgend angedeutet:

A$a\alpha$	B$a\alpha$	C$a\alpha$	D$a\alpha$
A$a\beta$	B$a\beta$	C$a\beta$	D$a\beta$
A$a\gamma$	B$a\gamma$	C$a\gamma$	D$a\gamma$
A$a\delta$	B$a\delta$	C$a\delta$	D$a\delta$
A$b\alpha$	B$b\alpha$	C$b\alpha$	D$b\alpha$
A$b\beta$	B$b\beta$	C$b\beta$	D$b\beta$
⋮	⋮	⋮	⋮
A$d\delta$	B$d\delta$	C$d\delta$	D$d\delta$

Es ist klar, dass man auf diese Weise nothwendig alle Variationsformen, von der niedrigsten, A$a\alpha$, bis zur höchsten, D$d\delta$, erhalten muss.

Anmerkung. Hätte man das Product aus den drei viertheiligen Factoren $A+B+C+D$; $a+b+c+d$ und $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ zu entwickeln gehabt, so ist einleuchtend, dass die Theile des Products mit den obigen, durch Variation erhaltenen Formen übereinstimmen müssen; kurzum, dass der Mechanismus der Multiplication durch Variation ersetzt werden kann. Diese Bemerkung ist für die Folge wichtig und deshalb wohl zu beachten.

19.

Um bei der wirklichen Darstellung der Variationen durch Einführung der Ziffern, als Stellvertreter der Elemente, eine bequemere und deutlichere Schreibweise zu erhalten, wollen wir alle Anfangs-Elemente der verschiedenen Reihen mit 1, alle zweiten mit 2 &c. bezeichnen. Setzen wir dann noch fest, dass die Stellzahl in einer Variationsform zugleich diejenige (1ste, 2te etc.) Reihe angiebt, aus welcher das bezügliche Element genommen werden muss, so lassen sich alle Variationen nach der vorhin gegebenen Regel leicht darstellen, wie nachfolgendes Beispiel zeigt:

1 A,	2 B,	3 C,	4 D
a,	b,	c,	d
α,	β,	γ,	δ
111	211	311	411
112	212	312	412
113	213	313	413
114	214	314	414
121	221	321	421
122	222	322	422
123	223	323	423
124	224	324	424
131	231	331	431
132	232	332	432
133	233	333	433
134	234	334	434
141	241	341	441
142	242	342	442
143	243	343	443
144	244	344	444

Anmerkung. Hier scheint es zwar, als ob die Variationsformen, z. B. 112, 121, 211, permutirte Combinationen mit Wiederholung wären. In formeller Hinsicht sind sie es auch, allein in materieller Hinsicht sind sie an Inhalt wirklich verschieden; denn nach vorhergehender Bestimmung bedeutet in 112 die erste Stelle das erste Element der ersten Reihe; die zweite Stelle das erste Element der zweiten Reihe und die dritte Stelle das zweite Element aus der dritten Reihe. Es ist nämlich $112 = \mathrm{A} a \beta$; eben so ist $121 = \mathrm{A} b \alpha$; $211 = \mathrm{B} a \alpha$; $142 = \mathrm{A} d \beta$ &c.

20.

Aufgabe. Eine allgemeine Regel anzugeben, nach welcher man die Anzahl der möglichen Variationen aus einer gegebenen Anzahl Reihen berechnen kann.

Auflösung. Hat die erste der verschiedenen Reihen n, die zweite Reihe m Elemente, so lässt sich offenbar jedes der m Elemente mit jedem der n Elemente verbinden, was also $m.n$ Variationen gäbe. Hat nun die dritte Reihe p Elemente, so kann man wieder die mn Variationen mit jedem der p Elemente verbinden, was dann mnp Variationen giebt &c. Hat man m verschiedene Reihen von je n Elementen, so ist die Anzahl aller Variationen offenbar $= n^m$. In Zeichen:

$$\overset{m}{V}(1,2,3\ldots n) = n^m.$$

21.

In § 19 Anmerkung ist schon bemerkt worden, dass die Anzahl aller Variationen aus m Reihen von je n Elementen (was wir durch $\overset{m}{V}(1,2,3\ldots n)$ angedeutet) gleich ist der Anzahl der permutirten Combinationen mit Wiederholung aus n Elementen zur $m$ten Classe, was wir durch $\mathfrak{p}\overset{m}{C'}(1,2,3\ldots n)$ andeuten wollen. Dies giebt uns noch folgenden practisch wichtigen Satz:

$$\overset{m}{V}(1,2,3\ldots n) = \mathfrak{p}\overset{m}{C'}(1,2,3\ldots n)$$

Combination mit Wiederholung zu einer bestimmten Summe.

22.

Unter Combination mit Wiederholung aus n Elementen zur $m$ten Classe zur Summe s (in Zeichen ${}^s\overset{m}{C'}[1,2,3\ldots n]$) versteht man: nur diejenigen dieser Combinationen zu der

geforderten Classe anzugeben, worin die Quersumme der Elemente immer $= s$ ist. Aus ${}^{12}\overset{4}{C}'(1,2,3\ldots.9)$ hätte man z. B. unter andern: 1119, 1227, 1236 &c. Um alle möglichen dieser Combinationen zu finden (eine Aufgabe, welche zuweilen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommt), wird man folgendes Verfahren beobachten: Man schreibe das niedrigste Element der Reihe so oft hin, als der Exponent der Classe Einheiten hat, setze dann in die letzte Stelle von den übrigen Elementen ein solches (nöthigenfalls das höchste), welches zur Quersumme der vorhergehenden addirt, die verlangte Summe giebt. Kann selbst das höchste Element der Reihe diese Summe nicht hervorbringen, so muss man mit der vorletzten und wenn nöthig mit der vorvorletzten Stelle &c. so verfahren. Auf diese Weise erhält man zuerst die niedrigste Form. Hieraus folgen dann nach und nach die nächst höhern bis zur höchsten, mithin alle möglichen Formen, indem man (wie folgende Beispiele zeigen) von einem höhern Element eine Einheit abnimmt und der vorhergehenden Stelle hinzulegt und dann die rechts folgenden Stellen, so weit möglich, mit g l e i c h e n Elementen besetzt und darauf achtet, dass kein niedrigeres Element auf ein höheres folgt. Eben so ist es leicht, die Combinationen ohne Wiederholungen zu einer bestimmten Summe zu bilden.

${}^{12}\overset{4}{C}'(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$;

1119
1128
1137
1146
1155
1227
1236
1245
1335
1344
2226
2235
2244
2334
3333

${}^{11}\overset{3}{C}'(1,2,3,4,5,6)$

146
155
236
245
335
344

${}^{11}\overset{3}{C}(1,2,3,4,5,6)$

146
236
245

Variationen zu bestimmten Summen.

23.

Weil, nach § 19, Anmerkung, die Variationen aus m verschiedenen Reihen von je n Elementen (wenn man sie aus den, allen Reihen gemeinschaftlichen Zeigern $1,2,3\ldots n$ bildet) in formeller Hinsicht auch zum Vorschein kommen, wenn man aus den gemeinschaftlichen Zeigern $1,2,3\ldots n$ alle möglichen Combinationen mit Wiederholung zur $m$ten Classe bildet und dann die erhaltenen Formen permutirt, so erhält man offenbar die Anzahl aller Variationen zu einer bestimmten Summe bequemer, indem man die Combinationen mit Wiederholung zu dieser Summe bildet und dann die Permutationszahlen der erhaltenen Formen addirt. In Zeichen:

$$^{s}\overset{m}{V}(1,2,3\ldots\ldots n) = \mathfrak{p}\; ^{s}\overset{m}{C}{}'(1,2,3\ldots\ldots n)$$

24.

Aufgabe. Wie viele verschiedene Würfe sind mit drei Würfeln möglich und wie viele sind darunter, deren Augenzahl $=12$ ist?

Auflösung. Denkt man sich den einen Würfel mit weissen (w), den zweiten mit rothen (r) und den dritten mit blauen (b) Nummern bezeichnet, so erhellet leicht, dass z. B. die Würfe $\underset{wrb}{123}$; $\underset{rwb}{123}$; $\underset{rbw}{123}$ &c. als wirklich verschiedene betrachtet werden müssen. Wir haben hier also drei verschiedene Reihen von je 6 Elementen. Die Anzahl aller verschiedenen Würfe ist also: $\overset{3}{V}(1,2\ldots 6) = 6^3 = 216$ Weil ferner:

$$^{12}\overset{3}{V}(1,2,3,4,5,6) = \mathfrak{p}\; ^{12}\overset{3}{C}{}'(1,2,3,4,5,6)$$

so giebt es hier offenbar 25 verschiedene Würfe, deren Augenzahl $=12$ ist, denn die drei Formen 156, 246, 345 lassen jede 6, die Formen 255, 336 jede aber nur 3 Permutationen zu, und 444 kommt nur einmal vor.

156	6
246	6
255	3
336	3
345	6
444	1
	25

Zweites Buch.

Binomischer Lehrsatz für ganze Exponenten.

25.

Die Algebra lehrt die Regeln, nach welcher man die entwickelte zweite und dritte Potenz von einer beliebigen zweitheiligen Grösse (Binom) gleich aus dem Gedächtniss hinschreiben kann, nämlich:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Es kommt nun aber auch häufig vor, dass man eine viel höhere Potenz von einem Binom zu entwickeln hat, was durch unmittelbare wiederholte Multiplication offenbar sehr mühsam und langwierig sein würde. Da nun aber die entwickelte Potenz z. B. von $(a+b)^{10}$ gewiss nicht willkürlich, sondern durch den Potenzexponenten im Voraus bestimmt ist, so muss offenbar auch ein allgemeines Gesetz (Formel) existiren, nach welchem man die Entwickelung gleich fertig hinschreiben kann. Es entsteht deshalb die Aufgabe, dieses Gesetz zu entdecken und aufzustellen.

26.

Nehmen wir zuerst an, es solle aus verschiedenen zweitheiligen Factoren, z. B. aus sechs: $(a+b)$, $(c+d)$,...... das Product entwickelt werden. Schreibt man diese sechs Factoren unter einander und setzt darüber den gemeinschaft-

lichen Zeiger 1, 2, so könnte man das verlangte Product, zufolge § 18, Anmerkung, durch Variation finden Es wäre dann, indem man in den erhaltenen Variationen, statt der Zeiger 1, 2, die ihnen und ihren Plätzen entsprechenden Elemente setzt: 111111 so viel als *acegil;* ferner 111112 = *acegim;* 111121 = *acegkl* &c. Es ist hier nämlich 111121 nicht als Permutation von 111112 anzusehen, indem die Zeiger 1 und 2 an verschiedenen Plätzen verschiedene Bedeutung haben Wären aber, worauf es hier nur ankommt, die 6 zweitheiligen Factoren einander gleich $(a+b)$, so würde der Zeiger 1, an welchem Platze in einer Variationsform er auch stehen möge, immer a und eben so der Zeiger 2 immer b bedeuten und die Variationsformen 111112, 111121, 111211 &c. wären dann an Inhalt gleich (nämlich jede $= a^5b$) und als wirkliche Permutation der Combination 111112 anzusehen. Eben so wären dann 111122, 111212, 111221, 112112 &c. jede $= a^4b^2$. In diesem Falle also, wo die sechs zweitheiligen Factoren alle gleich sind, erhält man das Product derselben, d. i $(a+b)^6$ weit kürzer, wenn man, wie nebenstehend angedeutet, die Zeiger 1, 2 zur sechsten Classe mit Wiederholung combinirt und jede Form so oft nimmt, als ihre leicht zu berechnende Permutationszahl angiebt.

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ a & +\ b \\ c & +\ d \\ e & +\ f \\ g & +\ h \\ i & +\ k \\ l & +\ m \\ \hline \end{array}$$

111111
111112
111121
111122
111211
111212
111221
⋮
222222

Die Form 111111 oder a^6 enthält sechs gleiche Elemente und kommt also nur einmal vor. Dasselbe gilt von der Form 222222 oder b^6. Die Formen 111112, 122222 oder a^5b, ab^5 enthalten jede unter ihren sechs Elementen fünf gleiche, jede Form kommt also $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4.5} = 6$mal vor (§ 10).

Die beiden Formen 111122 und 112222 oder a^4b^2, a^2b^4, enthalten jede einmal vier

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ a & +\ b \\ a & +\ b \\ a & +\ b \\ a & +\ b \\ a & +\ b \\ a & +\ b \\ \hline \end{array}$$

$111111 = a^6$
$111112 = a^5b$
$111122 = a^4b^2$
$111222 = a^3b^3$
$112222 = a^2b^4$
$122222 = ab^5$
$222222 = b^6$

und einmal zwei gleiche Elemente und jede kommt also $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4.1.2} = \frac{6.5}{1.2}$mal vor.

Die Form $111222 = a^3 b^3$ kommt $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2.3} = \frac{6.5.4}{3.2.1}$mal vor, daher:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + \frac{6.5}{1.2}a^4b^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}a^3b^3 + \frac{6.5}{1.2}a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

27.

Aus vorstehendem § ist nun wohl klar geworden, dass, wenn man allgemein das Product, aus n gleichen zweitheiligen Factoren, d. i. die $n$te Potenz eines Binoms, $(a+b)^n$, zu entwickeln hat, darin die nebenstehend angedeuteten Formen a^n; $a^{n-1}b$; $a^{n-2}b^2$; $a^{n-3}b^3$;....ab^{n-1}; b^n zum Vorschein kommen müssen und von welchen die erste und letzte Form nur einmal vorkommt. Bezeichnen wir die Coefficienten der übrigen Formen vorläufig mit $\overset{1}{B}$, $\overset{2}{B}$, $\overset{3}{B}$..., so hat man:

$$\begin{array}{c} \overset{1}{\smile}\quad\overset{2}{\smile} \\ a+b \\ a+b \\ a+b \\ \vdots \\ a+b \\ \hline 1111...111 = a^n \\ 1111...112 = a^{n-1}b \\ 1111...122 = a^{n-2}b^2 \\ \vdots \\ 1122...222 = a^2b^{n-2} \\ 1222...222 = ab^{n-1} \\ 2222...222 = b^n \end{array}$$

$$(a+b)^n = a^n + \overset{1}{B}.a^{n-1}b + \overset{2}{B}.a^{n-2}b^2 + \dots + \overset{r}{B}.a^{n-r}b^r + \dots + \overset{n-1}{B}.ab^{n-1} + b^n$$

Die noch zu bestimmenden Coefficienten $\overset{1}{B}$, $\overset{2}{B}$...., welche die Binomial-Coefficienten heissen, sind, wie schon bemerkt, nichts Anderes, als die Permutationszahlen der Formen, vor welchen sie stehen, und deshalb leicht zu berechnen.

Jede Form a^n, $a^{n-1}b$ &c. enthält n Elemente, indem jede

folgende Form ein a verliert und dafür ein b wieder au-nimmt.

Die Form a^n kommt nur einmal vor.

Die Form $a^{n-1}b$ enthält n Elemente, worunter $n-1$ gleiche, daher (§ 10):

$$\overset{1}{B} = \frac{1.2.3.4\ldots(n-2)\,(n-1)\,n}{1.2.3.4\ldots(n-2)\,(n-1)} = n$$

Die folgende Form, $a^{n-2}b^2$, enthält wieder n Elemente, worunter einmal $n-2$ und einmal 2 gleiche, daher:

$$\overset{2}{B} = \frac{1.2.3\ldots(n-2)\,(n-1)\,n}{1.2.3\ldots(n-2)\,.\,1\,.\,2} = \frac{n.n-1}{1\,.\,2}$$

Allgemein ist der $r$te Binomial-Coefficient:

$$\overset{r}{B} = \frac{1.2.3\ldots(n-r)\,(n-r+1)\,(n-r+2)\ldots(n-1)\,n}{1.2.3\ldots(n-r)\,.\,1\,.\,2\,\ldots\,r}$$

$$\overset{r}{B} = \frac{n.(n-1).(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,r}$$

Daher, weil n eine ganze Zahl ist, ganz allgemein *):

$$(a+b)^n = a^n + n.a^{n-1}b + \frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1\,.\,2\,.\,3}a^{n-3}b^3 + \ldots + n.ab^{n-1} + b^n$$

28.

Wir fügen vorstehender wichtigen Formel noch ein paar sich von selbst aufdringende Bemerkungen hinzu:

1. Die $n$te Potenz eines Binoms hat allemal $n+1$ Glieder.

2. Die Coefficienten, welche von Anfang und Ende gleich weit abstehen, sind einander gleich und man braucht deshalb

*) Diese zuerst von Newton gefundene Binomialformel, von der wir in der Folge zeigen werden, dass sie unter Umständen auch für gebrochene und negative Exponenten gültig ist, soll Newton zu Ehren auf seinem Denkmal, in der Westminster-Abtei, eingegraben sein; sie ist in der That so wichtig, dass man sie mit Recht das Fundament der ganzen höhern Mathematik nennt.



dieselben nach vorstehender Formel nur bis zum mittelsten Gliede zu berechnen und die folgenden nur wieder abzuschreiben.

3. Ist der eine Theil des Binoms, z. B. b, negativ, so sind natürlich alle diejenigen Glieder in der Entwickelung negativ, in welchen b in einer ungraden Potenz erscheint. So ist z. B.:

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

29.

Aufgabe. Man entwickele nach der Binomialformel folgende Potenzen: $(a+b)^7$; $(1+x)^n$; $(x+1)^n$; $(a+b)^{n+1}$.

Auflösung. Man hat:

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n.n-1}{1\,.\,2}x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots + nx^{n-1} + x^n$$

$$(x+1)^n = x^n + nx^{n-1} + \frac{n.n-1}{1\,.\,2}x^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2}{1\,.\,2\,.\,3}x^{n-3} + \ldots + nx + 1$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + (n+1)a^nb + \frac{(n+1).n}{1\,.\,2}a^{n-1}b^2 + \frac{(n+1)n.(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{n-2}b^3 + \ldots$$
$$+ (n+1)ab^n + b^{n+1}$$

30.

Da die Binomialformel:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n.n-1}{1\,.\,2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$$

für jeden Werth von a und b gültig ist, so kommt, wenn man $a=1$ und $b=1$ setzt, $(1+1)^n$, nämlich:

$$2^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n.n-1}{1\,.\,2} + \frac{n.n-1.n-2}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots + 1$$

und hieraus:

$$2^n - 1 = \frac{n}{1} + \frac{n.n-1}{1\,.\,2} + \frac{n.n-1.n-2}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\ldots + 1$$

Zufolge § 12 drückt das Glied $\frac{n}{1}$ die Anzahl aller möglichen Combinationen aus n Elementen zur ersten Classe aus, das folgende Glied $\frac{n.n-1}{1\,.\,2}$ die Anzahl aller Combinationen zur zweiten Classe &c. Es ist mithin die Anzahl aller Combinationen aus n Elementen zu allen möglichen: ersten, zweiten, dritten &c. bis $n$ten Classe $= 2^n - 1$.

31.

Setzt man in der Binomialformel $a = 1$ und $b = -1$, so kommt $(1-1)^n$, nämlich:

$$0 = 1 - \frac{n}{1} + \frac{n.n-1}{1\,.\,2} - \frac{n.n-1.n-2}{1\,.\,2\,.\,3} + - \ldots \pm 1$$

und hieraus:

$$1 = \frac{n}{1} - \frac{n.n-1}{1\,.\,2} + \frac{n.n-1.n-2}{1\,.\,2\,.\,3} - + \ldots \mp 1$$

Hier drückt die Summe der positiven Glieder der rechten Seite die Anzahl der Combinationen zu allen möglichen ungraden und die Summe der negativen Glieder die Anzahl der Combinationen aller graden Classen aus n Elementen aus. Die Anzahl aller ungraden Combinationen aus n Elementen ist also immer um eine Einheit grösser, als die Anzahl aller graden Combinationen. Dies ist ein merkwürdiges Factum der Rechnung. Greift man blindlings in einen beliebigen Haufen gleicher Elemente (z. B. gleicher Geldstücke, Kugeln &c.), so ist es nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung wahrscheinlicher, eine ungrade als eine grade Anzahl in der Hand zu haben.

32.

Addirt man die beiden gefundenen Gleichungen:

$$2^n - 1 = \frac{n}{1} + \frac{n.n-1}{1.2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} + \ldots + 1$$

$$1 = \frac{n}{1} - \frac{n.n-1}{1.2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} - + \ldots \mp 1$$

so erhält man:

$$\frac{2^n}{2} = 2^{n-1} = \frac{n}{1} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

folglich ist die Anzahl der Combinationen aller ungraden Classen aus n Elementen $= 2^{n-1}$ und mithin die aller graden Classen $= 2^{n-1} - 1$ (weil ja, § 31, die Anzahl aller ungraden Classen um eine Einheit grösser ist, als die der graden).

33.

Unter den Binomial-Coefficienten unmittelbar auf einander folgender Potenzen finden hinsichtlich ihrer Summen, Producte &c. mehrere merkwürdige Sätze Statt, wovon wir jedoch nur einen, weil für die Folge wichtig, hier aufnehmen.

Entwickelt man nämlich mehrere auf einander folgende Potenzen eines Binoms, z. B.:

$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

so zeigt sich, dass allgemein die Summe des $r$ten und $r + 1$ten Coefficienten irgend einer Potenz gleich ist dem $r + 1$ten Coefficienten der nächst folgenden Potenz. Deutet man den $r$ten Coefficienten der $n$ten Potenz durch ${}^n\overset{r}{B}$, den $r + 1$ten Coefficienten derselben Potenz durch ${}^n\overset{r+1}{B}$ und durch ${}^{n+1}\overset{r+1}{B}$ den

$r+1$ten Coefficienten der $n+1$ten Potenz an, so ist in Zeichen:

$${}^{n+1}\overset{r+1}{B} = {}^{n}\overset{r}{B} + {}^{n}\overset{r+1}{B}$$

Es ist nämlich nach § 27:

$${}^{n}\overset{r}{B} = \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots(n-r+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4\;\ldots\;r}$$

$${}^{n}\overset{r+1}{B} = \frac{n.(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots\ldots(n-r+1)\,(n-r)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4\;\ldots\ldots\;r\;.\;(r+1)}$$

Addirt man diese beiden Coefficienten, indem man gleich den ersten als gemeinschaftlichen Factor heraussetzt, so ist:

$${}^{n}\overset{r}{B} + {}^{n}\overset{r+1}{B} = \frac{n.n-1.n-2\ldots(n-r+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;r}\left(1+\frac{n-r}{r+1}\right)$$

$$= \frac{n.n-1.n-2\ldots(n-r+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;r} \cdot \frac{n+1}{r+1}$$

$$= \frac{n+1.n.n-1.n-2\ldots(n-r+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4\;\ldots\;r+1}$$

Letzterer Ausdruck ist offenbar der $(r+1)$te Coefficient von $(a+b)^{n+1}$, mithin der behauptete Lehrsatz bewiesen.

Drittes Buch.

Arithmetische Reihen höhern Ranges.

34.

In der Einleitung zur höhern Geometrie ist der hier als bekannt vorauszusetzende Begriff einer veränderlichen Grösse, so wie auch der Begriff Function einer veränderlichen Grösse gegeben und durch Beispiele erläutert worden (pag. 14). Auch ist daselbst schon die Eintheilung aller Functionen in transcendente und algebraische erwähnt. Wenn nämlich in einer Function von x die veränderliche Grösse x als Exponent, Logarithmus oder auch als Bogen oder Winkel vorkommt, z. B. a^x, $\log x$, $\sin x$ &c., so heissen solche Functionen transcendente, alle übrigen dagegen heissen algebraische.

Die algebraischen Functionen heissen rational, wenn die veränderliche Grösse mit keinem Wurzelzeichen oder gebrochenen Exponenten behaftet ist. Ist dies aber der Fall, so heissen sie irrational.

Die algebraischen rationalen Functionen heissen kurzweg: ganze Functionen, wenn die veränderliche Grösse darin nicht als Divisor vorkommt; ist dies aber der Fall, so heissen sie gebrochene Functionen und zwar echt gebrochen, wenn die veränderliche Grösse im Nenner einen höhern Exponenten hat als im Zähler. So ist z. B. $\frac{a+bx+cx^2}{a+\beta x^3}$ eine echt gebrochene, $\frac{a+bx^2}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$ dagegen eine unecht gebrochene Function.

Die ganzen Functionen unterscheidet man ferner nach Graden, welche der höchste Exponent angiebt, $a+bx+cx^2$; $a+cx^2$; cx^2 sind z. B. alle drei vom zweiten Grade.

Eine Function heisst eine grade Function, wenn sie für gleiche entgegengesetzte Werthe der veränderlichen Grösse vollkommen gleiche Resultate giebt. Solche sind z. B. $a+bx^2+cx^4$, $\cos x$, c^{xx}, r^2-x^2 &c., denn ob hierin $x=h$ oder $x=-h$ genommen wird, man erhält doch dasselbe Resultat. Diejenigen Functionen dagegen, welche für gleiche entgegengesetzte Werthe der veränderlichen Grösse gleich grosse, aber entgegengesetzte Resultate geben, heissen ungrade Functionen. Solche sind z. B. $ax+bx^3+cx^5$, $\sin x$ &c.

Wenn schliesslich für keinen endlichen Werth einer veränderlichen Grösse der Betrag der daraus gebildeten Function weder unendlich noch imaginär wird, so heisst die Function stetig (continuirlich), sonst unstetig (discontinuirlich). Unstetig sind z. B. $\sqrt{x^2-a^2}$, $\frac{a}{x^3}$, $\frac{a}{x-b}$, weil erstere für alle Werthe von x, die kleiner als a sind, also zwischen den Grenzen von $x=0$ bis $x=\pm a$ imaginär, die zweite für $x=0$ und die dritte für $x=b$ unendlich wird.

35.

Sei nun y irgend eine Function von x; in Zeichen $y=\varphi(x)$, so ist in der höhern Geometrie gezeigt, dass eine Function zweier veränderlicher Grössen, wenn man darin die absolut veränderliche sich stetig ändern lässt, eine geometrische Bedeutung hat, nämlich (im Allgemeinen) irgend eine Linie darstellt.

Lassen wir nun aber in der Function, $y=\varphi(x)$, die absolut veränderliche Grösse x nicht stetig sich ändern, sondern sprungweise und zwar immer um gleiche Sätze, z. B. $x=1,2,3,4\ldots$ und berechnen den jedesmaligen Betrag der Function, so erhält dieselbe eine rein arithmetische Bedeutung. Sie stellt dann keine Linie, sondern eine Reihe von Zahlen dar, die wie die entsprechende Linie begrenzt sein, oder auch in's

Unendliche fortlaufen, so wie auch für gewisse Werthe von x unterbrochen sein kann.

36.

In geometrischer Hinsicht heisst φ (x) das Gesetz, nach welchem die räumliche Grösse sich bildet, und wir wissen, dass diese an Gestalt und Eigenschaften dadurch vollkommen bestimmt ist. Eben so kann man in arithmetischer Hinsicht sagen, dass durch $\varphi(x)$ die daraus entspringende Reihe von Zahlen im Voraus sammt allen ihren etwaigen Merkwürdigkeiten vollkommen bestimmt ist und die $\varphi(x)$ deshalb das Gesetz (allgemeine Glied) der daraus entspringenden Zahlenreihe nennen, und es ist klar, dass jede andere Function von x (im Allgemeinen) eine andere Reihe von Zahlen giebt, und φ (x) also auch eine unerschöpfliche Quelle von Zahlenreihen darstellt.

37.

Wir können diese Vergleichung der Arithmetik mit der Geometrie noch weiter fortsetzen, denn so unähnlich sie in jeder andern Hinsicht sind, so haben sie doch in ihrem Zweck und Wesen eine gewisse Aehnlichkeit.

So wie nämlich die höhere Geometrie aus der willkürlich aufgeworfenen Function $y = \varphi$ (x) das darin enthaltene Bild und dessen Merkwürdigkeiten darzustellen sucht, so wie auch aus einer mechanischen Entstehungsweise oder gegebenen Eigenschaften einer räumlichen Grösse ihr eigentliches (arithmetisches) Gesetz aufsucht, aus welchem alle übrigen Eigenschaften, so wie die Rectification und Quadratur derselben gefunden werden kann, so soll dagegen die Analysis in ähnlicher Weise die in der willkürlich aufgeworfenen Function, $y = \varphi(x)$, enthaltene Zahlenreihe, so wie alle ihre Merkwürdigkeiten darstellen und umgekehrt, wenn eine auf andere Weise gebildete Zahlenreihe gegeben ist, z. B. die mittleren täglichen Thermometer- oder Barometerstände &c., das darin herrschende allgemeine Gesetz aufsuchen, nach welchem jedes beliebige Glied der Reihe bestimmt, so wie auch die etwaigen Eigenschaften der Reihe,

die Summe einer bestimmten Anzahl Glieder &c., gefunden werden kann.

38.

Nichts in der Natur ist gesetzlos, und um die mannichfachen Erscheinungen erklären und voraussagen zu können, kommt es nur darauf an, die Gesetze, nach welchen die Natur wirkt, zu entdecken. Die Forschungen nach Naturgesetzen führen aber fast immer auf räumliche Gestalten oder auf Zahlenreihen, in welchen sie liegen. Deshalb gewährt auch die Speculation über räumliche Grössen und Zahlenreihen nicht allein wissenschaftliches, sondern auch practisches Interesse. Die Zahlenreihen sind besonders für die Experimental-Physik von grosser Wichtigkeit, weil man durch dieselben eine veränderliche, aber deshalb nicht zufällige Erscheinung unter einem sich immer gleich bleibenden Gesetze aufzufassen sucht.

Die Betrachtung der Zahlenreihe hat auf manche glückliche Entdeckung in der Mathematik selbst geführt. Leibnitz ist dadurch auf die Erfindung und Begründung der Differential- und Integralrechnung gekommen. Ohne Kenntniss der Zahlenreihen würde Babbage seine merkwürdige Rechenmaschine nicht erfunden haben.

39.

Da es unzählige verschiedene Functionen von einer veränderlichen Grösse und mithin auch eine Unzahl von Zahlenreihen giebt, so ist es offenbar unthunlich, jede besondere Zahlenreihe mit einem besondern Namen zu benennen Wir müssen deshalb, um Ordnung zu erhalten, die verschiedenen Zahlenreihen in Classen zu bringen suchen, wovon jede eine ganze Sippschaft begreift, und hiezu verhilft uns die § 34 erwähnte Eintheilung der verschiedenartigen Functionen. Denn es lässt sich muthmassen, dass Reihen, welche aus einerlei Art Functionen entspringen, bei all ihrer sonstigen Verschiedenheit, dennoch ähnliche Merkmale besitzen werden.

Wir betrachten deshalb zuerst die einfachste Art Reihen, deren Bildungsgesetz eine ganze Function ist und mithin die

Form: $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots$ hat (§ 34). So wie man nun übereingekommen ist, alle Linien, die aus einer ganzen Function entspringen, kurzweg parabolische Linien zu nennen*) und sie nur nach dem durch den höchsten Exponenten von x bestimmten Grade zu unterscheiden, so ist man ebenfalls übereingekommen, alle aus solchen ganzen Functionen hervorgehende Reihen kurzweg arithmetische Reihen zu nennen und sie bloss nach dem Range ihrer Function zu unterscheiden.

40.

Um das Vorhergehende zuerst durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, sei:

$$y = 2x^3 - x + 1.$$

Setzen wir für die absolut veränderliche Grösse x nach und nach die auf einander folgenden Zahlen 0, 1, 2, 3......, welche zugleich die Zeiger (Stellzahl) der entsprechenden Glieder andeuten, so erhalten wir folgende Reihe, welche der gegebenen Erklärung zufolge eine arithmetische Reihe dritten Ranges ist:

$$\overset{0}{1},\quad \overset{1}{2},\quad \overset{2}{15},\quad \overset{3}{52},\quad \overset{4}{125},\quad \overset{5}{246}\ldots\ldots$$

Betrachten wir nun diese Reihe, so scheint auf den ersten Blick die grösste Unregelmässigkeit darin zu herrschen. Gleichwohl wissen wir, dass kein blinder Zufall die Glieder derselben zusammengewürfelt hat, vielmehr jedes derselben nach einem und demselben Gesetze $\varphi(x) = 2x^3 - x + 1$ entsprungen ist und dass Jeder, der dieses Gesetz kennt, im Stande ist, jedes andere Glied sofort zu bestimmen. Wollen wir z. B. das zehnte Glied, so ist dieses $= 2 . 10^3 - 10 + 1 = 1991$. Dieser Reihe, so wie allen übrigen arithmetischen Reihen sind offenbar nur willkürliche Grenzen zu setzen, d. h. wir können sie beliebig

*) Die gewöhnliche Parabel ist als specieller Fall darin enthalten.

weit fortsetzen und zwar nach beiden Seiten, denn setzen wir statt x auch nach und nach — 1, — 2 ... so erhält man:

.... −3	−2	−1	0	1	2	3	4 ...
....−50,	−13,	0,	1,	2,	15,	52,	125....

Und eine solche nach beiden Seiten unbegrenzte Zahlenreihe könnte, im Fall sie das Gesetz irgend einer veränderlichen Naturerscheinung darstellte, ein Bild der Zeit sein. Von einer bestimmten Epoche aus könnte man sowohl vorwärts als rückwärts schauen und sehen, was war, ist und sein wird.

41.

Man kann aus dem bekannten Gesetze einer arithmetischen Reihe durch eine leichte Umformung ein anderes von gleichem Range für dieselbe Reihe ableiten, nach welchem jedes beliebige Glied derselben zum ersten wird. Die Function

$$y = 2x^3 - x + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

giebt die Reihe:

−2	−1	0	1	2	3	4
... −13,	0,	1,	2,	15,	52,	125...

in welcher 2 das erste Glied ist, indem für $x = 1$, $y = 2$ wird.

Um nun für dieselbe Reihe das Gesetz zu erhalten, nach welchem nicht 2, sondern 15 als erstes Glied erscheint, braucht man nur in Gleichung (1) $x + 1$ statt x zu setzen, so erhält man:

$$y = 2\,(x + 1)^3 - (x + 1) + 1 \ldots\ldots\ldots (2)$$

denn setzt man in (2) $x = 1$, so kommt offenbar dasselbe, als wenn man in (1) $x = 2$ setzt &c. Die Gleichung (2) oder, indem man die Klammern auflöst, die Gleichung:

$$y = 2x^3 + 6x^2 + 5x + 2$$

giebt nun für $x = 0, 1, 2 \ldots$, $y = 2, 15, 52 \ldots$ Soll in obiger Reihe 52 das erste Glied sein, so würde man in (1) $x + 2$

statt x, und wenn 1 das erste Glied sein soll, $x-1$ statt x setzen &c. (Vergl.: Höhere Geometrie § 68.)

42.

Liegt nun irgend eine gesetzmässige Reihe von Zahlen vor uns, so können wir aus derselben sogenannte Differenzreihen bilden, indem wir jedes Glied von dem nächstfolgenden abziehen. Die auf einander folgenden Differenzen bilden dann eine andere Zahlenreihe, welche die erste Differenzreihe heisst. Mit dieser können wir dann eben so, wie mit der gegebenen oder sogenannten Hauptreihe verfahren und erhalten dann die zweite Differenzreihe &c.

Sei z. B. das Gesetz oder allgemeine Glied der Hauptreihe

$$y = 2x^3 - x + 1,$$

so ist die

	1	2	3	4	5	6
Hauptreihe......	2,	15,	52,	125,	246,	427...
I. Differenzreihe..		13,	37,	73,	121,	181...
II. „ ..			24,	36,	48,	60...
III. „ ..				12,	12,	12...

43.

Es ist klar, dass alle Differenzreihen durch die Hauptreihe im Voraus bestimmt, und wenn auch nach andern Gesetzen gebildet, so doch gesetzmässig sein werden und dass die Gesetze (allgemeinen Glieder), nach welchen sie entspringen, aus dem Gesetze für die Hauptreihe sich müssen ableiten lassen. Um z B. aus dem allgemeinen Gliede, der Hauptreihe des vorigen §, nämlich:

$$y = 2x^3 - x + 1$$

das allgemeine Glied der ersten Differenzreihe, welches wir mit $\triangle y$ bezeichnen wollen, zu finden, überlege man die Sache so: Subtrahirt man das erste Glied der Hauptreihe von dem

zweiten, so erhält man das erste Glied der ersten Differenzreihe. Subtrahirt man das zehnte Glied der Hauptreihe vom elften, so erhält man das zehnte Glied der ersten Differenzreihe &c. Setzt man also in dem allgemeinen Gliede der Hauptreihe $2x^3 - x + 1$ einmal $x = 100$ und dann $x = 101$ und subtrahirt das erste Resultat vom zweiten, so erhält man offenbar das hundertste Glied der ersten Differenzreihe:

$$= 2.101^3 - 101 + 1 - (2.100^3 - 100 + 1)$$

und wenn man statt 100 und 101 ganz allgemein x und $x + 1$ setzt, so erhält man offenbar das $x$te (allgemeine) Glied der 1sten Differenzreihe, welches wir mit $\triangle y$ bezeichnen, so dass also:

$$\triangle y = 2(x + 1)^3 - (x + 1) + 1 - (2x^3 - x + 1)$$

oder, die Klammern aufgelöst:

$$\triangle y = 6x^2 + 6x + 1$$

das allgemeine Glied der ersten Differenzreihe. Diese ist also wieder eine arithmetische Reihe und zwar von einem Range niedriger. Setzt man hierin $x = 1, 2, 3\ldots$, so kommt die Reihe: 13, 37, 73...

Da man nun offenbar auch allgemein das $x$te Glied der zweiten Differenzreihe erhält, wenn man das $x$te Glied der ersten Differenzreihe vom $x + 1$ten subtrahirt, so ist, indem wir das Resultat mit $\triangle^2 y$ bezeichnen:

$$\triangle^2 y = 6(x + 1)^2 + 6(x + 1) + 1 - (6x^2 + 6x + 1).$$

Es ist also

$$\triangle^2 y = 12x + 12$$

das allgemeine Glied der zweiten Differenzreihe, welche also wiederum von einem Range niedriger, nämlich vom ersten Range, also eine gewöhnliche arithmetische Progression ist. Setzt man $x = 1, 2, 3\ldots$, so kommt die Reihe: 24, 36, 48... Subtrahirt man wieder das $x$te Glied der zweiten Differenzreihe vom $x + 1$ten, so erhält man das allgemeine Glied der dritten Differenzreihe, nämlich:

$$\triangle^3 y = 0 \,.\, x + 12 = 12.$$

Diese Betrachtungen führen uns auf folgenden merkwürdigen Satz:

44.

Lehrsatz. Jede arithmetische Reihe vom $n$ten Range giebt immer n und nur n Differenzreihen. Unter den Gliedern der $n$ten Differenzreihe giebt es nämlich keine Differenzen mehr, sie sind alle einander gleich und zwar gleich der vollen Permutationszahl aus dem höchsten Exponenten der veränderlichen Grösse, multiplicirt mit dem constanten Coefficienten, womit die höchste Potenz im allgemeinen Gliede behaftet ist. In Zeichen, wenn:

$$y = Ax^n + Bx^p + \ldots . + T \ldots .$$

das allgemeine Glied der Hauptreihe und n der grösste Exponent ist, so hat diese Reihe, was auch die übrigen auf das höchste Glied Ax^n folgenden niedrigern Glieder sein mögen, immer n Differenzreihen und in der $n$ten (letzten) Differenzreihe ist jedes Glied $= 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots n \,.\, A.$

Beweis. Subtrahirt man das $x$te Glied vom $x+1$ten, so erhält man das $x$te (allgemeine) Glied der 1sten Differenzreihe, nämlich:

$$\triangle y = A(x+1)^n + B(x+1)^p + \ldots . + T - (Ax^n + Bx^p + \ldots . + T)$$

oder entwickelt (weil [§ 29] $(x+1)^n = x^n + nx^{n-1} + \ldots .$) kürzer:

$$\triangle y = nAx^{n-1} + B_{,}x^{n-2} + \ldots . + T_{,}.$$

Die hier auf das höchste Glied, $n \,.\, Ax^{n-1}$, folgenden niedrigern Glieder $B_{,}x^{n-2}$ &c. brauchen wir für die Beweisführung nicht zu kennen, indem sie (weil zuerst herausfallend) auf die fragliche allerletzte Differenzreihe keinen Einfluss haben können.

Aus dem gefundenen höchsten Gliede $n \,.\, Ax^{n-1}$ des Gesetzes für die erste Differenzreihe könnte man nun auf dieselbe Weise das höchste Glied des Gesetzes für die zweite Differenzreihe ableiten. Man sieht aber leicht, dass man dies viel kürzer

erhalten kann. Denn so wie aus dem höchsten Gliede für die Hauptreihe, $Ax^n + \ldots + T$, das höchste Glied der ersten Differenzreihe entspringt, indem man den Coefficienten A mit dem Exponenten der veränderlichen Potenz multiplicirt und diese Potenz um eine Einheit verringert, nämlich: nAx^{n-1}, so muss offenbar aus diesem höchsten Gliede für die erste Differenzreihe, indem wir nur diesen Schluss wiederholen, das höchste Glied für die zweite Differenzreihe entspringen, nämlich: $(n-1).nAx^{n-2}$&c. Mithin ist:

$$\begin{aligned}
&\triangle^2 y = (n-1).nAx^{n-2} + B_2 x^{n-3} + \ldots\\
&\triangle^3 y = (n-2).(n-1).nAx^{n-3} + \ldots\\
&\vdots\\
&\triangle^{10} y = (n-9)(n-8)\ldots(n-1)nAx^{n-10} + \ldots\\
&\vdots\\
&\triangle^{n-1} y = 2.3.4\ldots(n-1)nAx + T_{n-1}.
\end{aligned}$$

Es ist also $2.3.4\ldots(n-1)nAy + T_{n-1}$ das allgemeine Glied der $(n-1)$ten Differenzreihe, indem wir mit T_{n-1} den etwaigen constanten Theil bezeichnen.

Subtrahirt man nun schliesslich das $x$te Glied der $(n-1)$ten Differenzreihe vom $x+1$ten, so erhalten wir das $x$te Glied der $n$ten Differenzreihe, nämlich:

$$\triangle^n y = 2.3.4\ldots nA(x+1) + T_{n-1} - (2.3.4\ldots nAx + T_{n-1})$$
$$\triangle^n y = 0.x + 1.2.3\ldots(n-1)nA.$$

Da nun dieses allgemeine Glied für die $n$te Differenzreihe kein x mehr enthält, indem für jeden Werth von $x = 1, 2, 3\ldots$ doch immer $0.x = 0$ ist, so ist klar, dass jedes Glied der $n$ten Differenzreihe $= 1.2.3\ldots nA$ ist, wie der Lehrsatz behauptet.

45.

Der vorstehende Lehrsatz lässt sich noch allgemeiner so aussprechen: *)

---

*) Dieser und der folgende 46ste § hängen mit dem Folgenden nicht zusammen und können deshalb auch überschlagen werden.

Setzt man in einer ganzen Function $y = Ax^n + \dots + T$, für die veränderliche Grösse x erst einen ganz beliebigen Werth, den wir mit x_0 bezeichnen wollen und dann immer um eine ganz beliebige Grösse, h, mehr, d. h. setzen wir statt x nach und nach x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$, $x_0 + 3h \dots$ (so wie auch abnehmend $x_0 - h$, $x_0 - 2h \dots$), so erhält man eine arithmetische Reihe, welche n Differenzreihen giebt. In der $n$ten (letzten) Differenzreihe ist dann jedes Glied $= 1.2.3 \dots n A . h^n$. *)

Nennen wir hier die Glieder der Hauptreihe, welche für $x = x_0 + 0.h, = x_0 + h, = x_0 + 2h \dots$ entspringen, das 0te, 1ste, 2te Glied &c., so erhält man offenbar das $r$te Glied der ersten Differenzreihe, wenn man das $r$te Glied der Hauptreihe vom $r+1$ten subtrahirt. Um nun die allgemeine Richtigkeit des behaupteten Satzes einzusehen, setzen wir in das allgemeine Glied der Hauptreihe:

$$y = Ax^n + Bx^p + \dots + T$$

statt x einmal $x + h$ und einmal x, und subtrahiren das letztere Resultat vom ersteren, so hat man für das $x$te (allgemeine) Glied der 1sten Differenzreihe den Ausdruck:

$$\triangle y = A(x+h)^n + B(x+h)^p + \dots + T - (Ax^n + Bx^p + \dots + T) \dots (1);$$

denn setzt man hierin nach und nach $x_0 + h$, $x_0 + 2h \dots$ statt x, so ist das so viel, als wenn man das erste Glied der Hauptreihe vom zweiten, das zweite vom dritten, ... subtrahirt und man erhält also das erste, zweite .... Glied der ersten Differenzreihe,

*) Sei zur Erläuterung x^3 das allgemeine Glied und $x_0 = 3$, $h = 2$, setzen wir also statt x nach und nach 3, 5, 7, 9 ...., so kommt:

	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
Hauptreihe....	−27,	−1,	1,	27,	125,	343,	729,	1331....
		26,	2,	26,	98,	218,	386,	602....
			− 24,	24,	72,	120,	168,	216....
				48,	48,	48,	48	

und in der dritten (letzten) Differenzreihe ist jedes Glied, wie behauptet, $= 1.2.3.2^3 = 48$.

welche man mit $\triangle y_1$, $\triangle y_2 \dots$ bezeichnet. Der Ausdruck (1) giebt nämlich für $x = x_0 + h$:

$$\triangle y_1 = A(x_0+2h)^n + B(x_0+2h)^p + \dots + T - [A(x_0+h)^n + B(x_0+h)^p + \dots + T]$$

und für $x = x_0 + 2h$:

$$\triangle y_2 = A(x_0+3h)^n + B(x_0+3h)^p + \dots + T - [A(x_0+2h)^n + B(x_0+2h)^p + \dots + T]$$

Reduciren wir den obigen Ausdruck (1) auf seine kürzere Form, indem wir die Klammern auflösen, so ist:

$$\triangle y = A(x^n + nx^{n-1}h + \dots + h^n) + B(x^p + px^{p-1}h + \dots + h^p) + \dots + T - (Ax^n + Bx^p + \dots + T)$$

$$\triangle y = n\,Ah \,.\, x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \dots + T_1$$

Man sieht also, dass das allgemeine Glied für die erste Differenzreihe von einem Range niedriger ist, als das der Hauptreihe. Wollte man dies allgemeine Glied genau kennen, so müsste man alle auf das höchste Glied $nAh \,.\, x^{n-1}$ folgenden niedrigeren, hier nur angedeuteten Glieder wirklich berechnen. Für die Beweisführung unseres Satzes ist dies aber nicht nöthig, weil sie auf die $n$te (letzte) Differenzreihe keinen Einfluss haben.

Durch ein ähnliches Raisonnement, wie in § 44, ergeben sich nun die allgemeinen Glieder der 2ten, 3ten....$n$ten Differenzreihen, nämlich:

$$\triangle^2 y = (n-1)\, nAh^2 \,.\, x^{n-2} + \dots$$

$$\triangle^3 y = (n-2)\,(n-1)\, nAh^3 x^{n-3} + \dots$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\triangle^{n-1} y = 2.3.4 \dots nAh^{n-1} \,.\, x^1 + T_{n-1}$$

$$\triangle^n y = 1.2.3 \dots nAh^n.$$

46.

Aus vorstehendem Satze folgt, dass, wenn man aus einer arithmetischen Reihe beliebig viele Glieder in gleichen Intervallen herauswirft, die übrigen Glieder dennoch eine arithmetische Reihe von demselben Range bilden.

Denn denkt man sich eine arithmetische Reihe gebildet, indem man in ihrem allgemeinen Gliede x_0, x_0+h, x_0+2h &c. statt x setzt und nimmt aus der Reihe zwischen je zwei Gliedern eins weg, so kann man sich die restirende Reihe aus demselben allgemeinen Gliede entstanden denken, indem man statt x nach und nach x_0, $x_0+1.2h$, $x_0+2.2h$.... und wenn man in gleichen Intervallen zwei Glieder weglässt, x_0, $x_0+1.3h$, $x_0+2.3h$.... gesetzt hat &c.

Ist z. B. x^2 das allgemeine Glied, $x_0=3$ und $h=1$, so hat man die Reihe:

$$\underbrace{}_{0}\quad\underbrace{}_{1}\quad\underbrace{}_{2}\quad\underbrace{}_{3}\quad\underbrace{}_{4}\quad\underbrace{}_{5}\quad\underbrace{}_{6}\quad\underbrace{}_{7}\quad\underbrace{}_{8}\quad\underbrace{}_{9}$$

$$\ldots.9,\quad 16,\quad 25,\quad 36,\quad 49,\quad 64,\quad 81,\quad 100,\quad 121,\quad 144\ldots.$$

Lässt man vom 0ten Gliede an zwei Glieder ausfallen, so kommt die Reihe:

$$\begin{array}{llll} 9, & 36, & 81, & 144\ldots. \\ & 27, & 45, & 63\ldots. \\ & & 18, & 18 = 1.2.3^2 \end{array}$$

47.

Aufgabe. Es sind so viele Glieder einer arithmetischen Reihe gegeben, dass der Rang derselben dadurch bestimmt werden kann; z. B.:

$$\ldots.-13,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 15,\quad 52,\quad 125\ldots.$$

Man soll das allgemeine Glied derselben finden.

Auflösung. Die Reihe giebt drei Differenzreihen, nämlich:

$$\begin{array}{rrrrrrr} 13, & 1, & 1, & 13, & 37, & 73, & 121\ldots. \\ & -12, & 0, & 12, & 24, & 36, & 48\ldots. \\ & & 12, & 12, & 12, & 12, & 12\ldots. \end{array}$$

und da nun bestimmt ist, dass die fragliche Reihe eine arithmetische sein soll, so muss das allgemeine Glied derselben nothwendig eine ganze Function vom dritten Grade sein, deren allgemeine Form:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ldots\ldots. (1)$$

Zufolge § 41 ist es gleichgültig, welches Glied in der Hauptreihe als das erste angenommen wird. Wir wollen deshalb das Glied 2 als erstes nehmen, mithin 1 als 0tes Glied. Dann müssen die in Gleichung (1) zu bestimmenden Coefficienten a, b, c, d offenbar so beschaffen sein, dass für $x = 0, 1, 2, 3 \ldots$ $y = 1, 2, 15, 52 \ldots$ wird. Dies gäbe dann zur Bestimmung von a, b, c, d vier Bedingungsgleichungen. Da aber jedes Glied der letzten Differenzreihe $= 12$, und, zufolge § 44, $1.2.3a = 12$ ist, so ist $a = \frac{12}{1.2.3} = 2$, und da ausserdem für $x = 0$, $y = 1$ sein muss, so ist (weil für $x = 0$ die drei ersten Glieder in (1) auch $= 0$ sind) $d = 1$, und wir brauchen also, um auch noch die Coefficienten b und c in dem schon näher bestimmten allgemeinen Gliede:

$$y = 2x^3 + bx^2 + cx + 1$$

zu finden, nur zwei Bedingungsgleichungen aufzustellen. Nun muss für $x = 1$, $y = 2$ sein, daher: $2 = 2 + b + c + 1$
„ $x = 2$, $y = 15$ „ „ $15 = 16 + 4b + 2c + 1$

Hieraus folgt: $b = 0$ und $c = -1$. (Algebra § 161.)

Mithin ist das gesuchte allgemeine Glied der vorgelegten Reihe:

$$y = 2x^3 - x + 1$$

Soll nicht 2, sondern 1 das erste Glied sein, so ist das allgemeine Glied (§ 41):

$$y = 2(x-1)^3 - (x-1) + 1$$
$$\text{oder } y = 2x^3 - 6x^2 + 5x.$$

Aufgabe. Man sucht das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 13, $73\frac{5}{6}$, 243, $604\frac{1}{2}\ldots$, in welcher $\frac{1}{3}$ das 0te, $\frac{1}{2}$ das erste Glied ist &c.

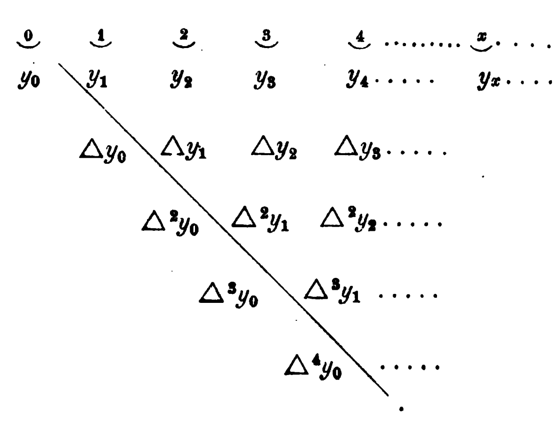
Antwort. Man findet $y = x^4 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{3}$.

Eben so findet man $9x^2$ und $\frac{x^3}{1000}$ als die allgemeinen Glieder der arithmetischen Reihen: 9, 36, 81, 144 .... und 0,001; 0,008; 0,027; 0,064; 0,125..., worin 9 und 0,001 die ersten Glieder sind.

48.

Aufgabe. *) Aus den Anfangsgliedern der Hauptreihe und sämmtlicher Differenzreihen das allgemeine Glied der Hauptreihe zu finden.

Auflösung. Um eine allgemeine Formel und eine bequeme Zeichensprache zu erhalten, wollen wir die den Zeigern 0, 1, 2....x entsprechenden Glieder der Hauptreihe mit y_0, y_1, y_2....y^x bezeichnen, so dass y_0, y_1, y_2....das 0te, 1ste.... Glied bedeutet. Eben so soll $\triangle y_0$, $\triangle y_1$....das 0te, 1ste.... Glied der ersten Differenzreihe und $\triangle^2 y_0$, $\triangle^2 y_1$.... das 0te, 1ste....Glied der zweiten Differenzreihe bedeuten &c., so dass also:



die Hauptreihe und ihre sämmtlichen Differenzreihen bedeuten.

*) Dieser und der folgende 49ste §, so wie auch § 50, 2, können so lange ungelesen bleiben, bis darauf zurückgewiesen wird.

Nach den fortgesetzten Begriffen ist nun:

$$\underset{1}{\smile}\qquad\qquad\underset{2}{\smile}\qquad\qquad\underset{3}{\smile}$$

$$\begin{array}{lll} y_1 - y_0 = \triangle y_0 & \triangle y_1 - \triangle y_0 = \triangle^2 y_0 & \triangle^2 y_1 - \triangle^2 y_0 = \triangle^3 y_0 \\ y_2 - y_1 = \triangle y_1 & \triangle y_2 - \triangle y_1 = \triangle^2 y_1 & \triangle^2 y_2 - \triangle^2 y_1 = \triangle^3 y_1 \\ y_3 - y_2 = \triangle y_2 & \triangle y_3 - \triangle y_2 = \triangle^2 y_2 & \triangle^2 y_3 - \triangle^2 y_2 = \triangle^3 y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Aus dem zweiten und dritten System vorstehender Gleichungen folgt:

$$\begin{array}{ll} \triangle y_1 = \triangle y_0 + \triangle^2 y_0 & \triangle^2 y_1 = \triangle^2 y_0 + \triangle^3 y_0 \\ \triangle y_2 = \triangle y_1 + \triangle^2 y_1 & \triangle^2 y_2 = \triangle^2 y_1 + \triangle^3 y_1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Das Zeichen $\triangle$ ist nun zwar ein blosses Symbol (keine Grösse), wenn man es aber in rein formeller Hinsicht als Factor betrachtet, so leuchtet ein, dass man letztere Gleichungen auch aus folgenden:

$$\begin{array}{ll} \triangle y_1 = \triangle(y_0 + \triangle y_0) & \triangle^2 y_1 = \triangle(\triangle y_0 + \triangle^2 y_0) \\ \triangle y_2 = \triangle(y_1 + \triangle y_1) & \triangle^2 y_2 = \triangle(\triangle y_1 + \triangle^2 y_1) \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

entstanden denken kann. Denn wird das Zeichen $\triangle$ formell als Factor behandelt, so erhält man, nach Auflösung der Klammern, die vorhergehenden Formen richtig wieder. Dies festgehalten, folgt nun aus dem ersten System der Gleichungen nach und nach:

$$y_1 = y_0 + \triangle y_0$$

$$y_2 = y_1 + \triangle y_1 = y_0 + \triangle y_0 + \triangle(y_0 + \triangle y_0)^{*})$$

oder: $y_2 = y_0 + \triangle y_0 + \triangle y_0 + \triangle^2 y_0$

$$y_2 = y_0 + 2\triangle y_0 + \triangle^2 y_0$$

ferner: $y_3 = y_2 + \triangle y_2 = y_0 + 2\triangle y_0 + \triangle^2 y_0 + \triangle(y_0 + 2\triangle y_0 + \triangle^2 y_0)^{*})$

$$y_3 = y_0 + 3\triangle y_0 + 3\triangle^2 y_0 + \triangle^3 y_0$$

---

*) Es wurde nämlich für y_1 sein Werth aus der vorhergehenden Gleichung substituirt und für $\triangle y_1$ derselbe Werth mit dem vorgesetzten Zeichen $\triangle$ als Factor behandelt &c.

Man sieht nun leicht, dass man jedes folgende Glied, z. B. y_4, erhält, wenn man von der Entwickelung des nächst vorhergehenden das erste Glied abschreibt, dann nach und nach jedem Gliede das Zeichen $\triangle$ (als Factor behandelt) vorsetzt und zum folgenden addirt, wodurch dann in der Entwickelung irgend eines Gliedes, z. B. y_x, vermöge § 33 die Binomial-Coefficienten der $x$ten Potenz eines Binoms zum Vorschein kommen müssen. So ist z B.:

$$y_1 = y_0 + \triangle y_0$$
$$y_2 = y_0 + 2\triangle y_0 + \triangle^2 y_0$$
$$y_3 = y_0 + 3\triangle y_0 + 3\triangle^2 y_0 + \triangle^3 y_0$$
$$y_4 = y_0 + 4\triangle y_0 + 6\triangle^2 y_0 + 4\triangle^3 y_0 + \triangle^4 y_0$$
$$y_x = y_0 + x\triangle y_0 + \frac{x\,.\,x-1}{1\,.\,2}\triangle^2 y_0 + \frac{x\,.\,x-1\,.\,x-2}{1\,.\,2\,.\,3}\triangle^3 y_0 + \ldots.$$

49.

Vorstehende allgemeine Formel kann vortheilhaft benutzt werden, um darnach das allgemeine Glied einer gegebenen arithmetischen Reihe, z. B. von

2, 15, 52, 125, 246......

zu finden, indem man zuerst die Anfangsglieder ihrer Differenzreihen sucht:

13,	37,	73,	121
	24,	36,	48
		12,	12

Hier hat man also: $y_0=2$, $\triangle y_0=13$, $\triangle^2 y_0=24$, $\triangle^3 y_0=12$, $\triangle^4 y_0=0$.

Daher ist:

$$y_x = 2 + x\,.\,13 + \frac{x\,.\,x-1}{1\,.\,2}\,.\,24 + \frac{x\,.\,x-1\,.\,x-2}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,12$$

$$y = 2 + 5x + 6x^2 + 2x^3$$

Setzt man hierin $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$, so kommt die obige Reihe.

Soll nicht, wie nach der allgemeinen Formel hier angenommen werden musste, 2 das 0te, sondern das 1ste Glied sein, so setze man in dem gefundenen allgemeinen Gliede nur $x - 1$ statt x, so ist:

$$y = 1 - x + 2x^3.$$

50.

Aufgabe. Es ist eine arithmetische Reihe, z. B. diese:

2, 15, 52, 125, 246....

gegeben, man sucht eine allgemeine Formel, nach welcher man die Summe beliebig vieler Glieder bestimmen kann.

Auflösung. Betrachtet man hier 2 als das erste Glied und denkt man sich, wie nachstehend angedeutet, die Summe von einem (ersten) Gliede über das erste, die Summe der beiden ersten Glieder über das zweite, die Summe der drei ersten Glieder über das dritte gesetzt &c.

Summenreihe....	2,	17,	69,	194,	440....
	1	2	3	4	5
Hauptreihe......	2,	15,	52,	125,	246....

so erhält man eine Reihe von Zahlen (die sogenannte Summenreihe), welche offenbar wieder eine arithmetische ist, und zwar von einem Range höher, als die, deren Summe gesucht wird. Denn subtrahirt man die auf einander folgenden Glieder der Summenreihe 2, 17. 69...., so muss offenbar als erste Differenzreihe die gegebene Reihe 2, 15, 52.... wieder erscheinen, und es ist ein beliebiges $x$tes Glied der Summenreihe = der Summe von x Gliedern der Hauptreihe. Man braucht also nur das allgemeine Glied der Summenreihe zu suchen. Dies kann nach § 47 durch die Methode der unbestimmten Coefficienten oder auch nach der allgemeinen Formel § 48 geschehen.

1) Nach der ersten Methode schliessen wir so: Da die gegebene Reihe, 2, 15, 52.... vom 3ten, also die Summenreihe

2, 17, 69.... vom 4ten Range ist, so muss ihr allgemeines oder das sogenannte summatorische Glied in folgender Form enthalten sein:

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Soll nun 2 das 1ste Glied bedeuten, so müssen die Coefficienten a, b, c, d, e so beschaffen sein, dass, wenn wir in vorstehender Form $x = 1, 2, 3 \ldots\ldots$ setzen, $y = 2, 17, 69 \ldots\ldots$ wird. Hieraus könnten wir zur Bestimmung der Coefficienten a, b, c, d, e fünf Bedingungs-Gleichungen bilden. Wir haben jedoch an drei genug, indem wir a und e kennen. Weil nämlich jedes der gleichen Glieder der letzten Differenzreihe $= 12$ ist, und $1.2.3.4a = 12$, so ist $a = \frac{1}{2}$, und weil von der Summenreihe die 1ste Differenzreihe 2, 15, 52.... sein soll, so muss nothwendig das 0te Glied der Summenreihe $= 0$ sein. Es muss also auch, weil das allgemeine Glied für $x = 0$, $y = 0$ geben soll, nothwendig $e = 0$ sein. Das gesuchte allgemeine Glied ist also näher bestimmt:

$$y = \tfrac{1}{2}x^4 + bx^3 + cx^2 + dx.$$

Da nun, wenn wir $x = 1, 2, 3$ setzen, $y = 2, 17, 69$ sein muss, so ist:

$$\begin{aligned} 2 &= \tfrac{1}{2} + b + c + d \\ 17 &= \tfrac{16}{2} + 8b + 4c + 2d \\ 69 &= \tfrac{81}{2} + 27b + 9c + 3d \end{aligned}$$

hieraus: $b = 1$, $c = 0$, $d = \frac{1}{2}$; mithin ist:

$$y = \tfrac{1}{2}x^4 + x^3 + \tfrac{1}{2}x$$

setzt man hierin $x = 1, 2 \ldots\ldots 1000$ &c., so hat man die Summe von ein, zwei.... tausend Gliedern der Reihe 2, 15, 52....

2) Will man von der Summenreihe:

$$0,\ \underset{1}{2},\ \underset{2}{17},\ \underset{3}{69}\ldots\ldots$$

das allgemeine Glied nach der Formel:

$$y = y_0 + x \,.\, \triangle y_0 + \frac{x \,.\, x-1}{1 \,.\, 2} \triangle^2 y_0 + \frac{x \,.\, x-1 \,.\, x-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \triangle^3 y_0 + \ldots .$$

bestimmen (§ 48), so ist hier: $y_0 = 0$, $\triangle y_0 = 2$, $\triangle^2 y_0 = 13$, $\triangle^3 y_0 = 24$, $\triangle^4 y_0 = 12$, $\triangle^5 y_0 = 0$, mithin:

$$y = 0 + x \,.\, 2 + \frac{x \,.\, x-1}{1 \,.\, 2} \,.\, 13 + \frac{x \,.\, x-1 \,.\, x-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, 24 + \frac{x \,.\, x-1 \,.\, x-2 \,.\, x-3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \,.\, 12$$

$$y = \frac{x^4}{2} + x^3 + \frac{x}{2}$$

51.

Um anzudeuten, dass die Reihe, welche aus einer Function von x entspringt, indem man darin $x = 1, 2, 3 \ldots .$ setzt, summirt werden soll, setzt man vor die Function das Zeichen Σ. So ist z. B.:

$$\Sigma(2x^3 - x + 1) = \tfrac{1}{2}x^4 + x^3 + \tfrac{1}{2}x = \frac{x}{2}(x^3 + 2x^2 + 1)$$

$$\Sigma(x) = 1 + 2 + 3 + \ldots . + x = \frac{x \,.\, (x+1)}{1 \,.\, 2}$$

$$\Sigma(x^2) = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots . + x^2 = \frac{x \,.\, (x+1)(2x+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$\Sigma(x^3) = 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots . + x^3 = \left\{\frac{x \,.\, (x+1)}{1 \,.\, 2}\right\}^2$$

$$\Sigma(x^4) = 1 + 2^4 + 3^4 + \ldots . + x^4 = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30}$$

Von den drei letzten Formeln wird in einigen Lehrbüchern der Mechanik Anwendung gemacht. Eine allgemeine Formel für $\Sigma(x^n)$ abzuleiten, halten wir nicht für practisch wichtig.

Viertes Buch.

Von den figurirten Zahlen.

52.

Bildet man aus der Reihe der auf einander folgenden natürlichen Zahlen 1, 2, 3,....n die Summenreihe, nämlich:

$$1, \quad 3, \quad 6, \quad 10, \quad 15 \ldots \frac{n.(n+1)}{1\,.\,2}$$

```
 0      0      0      0
       0 0    0 0    0 0    .........
              0 0 0  0 0 0
                     0 0 0 0
```

so entstehen die sogenannten dreieckigen Zahlen, weil, wenn man sich Kugeln von gleichem Durchmesser denkt, die Anzahl, welche jedes Glied der Reihe darstellt, sich in einer Ebene so an einander legen lassen, dass immer ein gleichseitiges Dreieck entsteht. Die Richtigkeit folgt unmittelbar aus der Reihe 1, 2, 3 ... An n Kugeln kann man $n-1$ legen, an diese wieder $n-2$ &c.

Aus demselben Grunde nennt man die Quadratzahlen auch wohl viereckige Zahlen.*)

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16 \ldots\ldots\ldots n^2$$

```
        0 0 0
 0  0 0 0 0 0 ..........
    0 0 0 0 0
```

Beiderlei vieleckige Zahlen sind offenbar arithmetische Reihen zweiten Ranges.

*) Es giebt übrigens noch viele andere Zahlenreihen, welche, jedoch unpassend, figurirte Zahlen (Polygonalzahlen) heissen, aber keinen practischen Nutzen haben.

53.

Bildet man aus den Reihen der dreieckigen und viereckigen Zahlen die Summenreihen, welche also vom dritten Range sein müssen und deren allgemeine Glieder, nach § 50, leicht zu finden sind, so erhält man die sogenannten dreieckigen und viereckigen Pyramidalzahlen, nämlich:

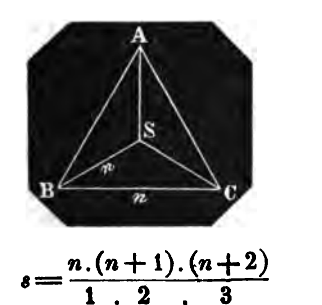
$$1,\quad 4,\quad 10,\quad 20,\quad 35 \ldots \frac{n \,.\, \overline{n+1} \,.\, \overline{n+2}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$1,\quad 5,\quad 14,\quad 30,\quad 55 \ldots \frac{n \,.\, \overline{n+1} \,.\, \overline{2n+1}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

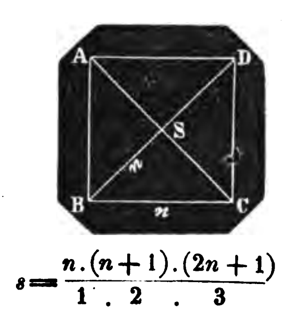
Der Name rührt daher, weil sich aus Kugeln von gleichem Caliber wirklich regelmässige Pyramiden bilden lassen. In der Reihe der dreieckigen Zahlen z. B. findet die erste Kugel Platz und kommt fest zu liegen auf den folgenden drei. Die hierdurch erhaltene dreieckige Pyramide von vier Kugeln kann man auf die folgende Schicht von sechs Kugeln gesetzt denken &c. Ebenso lassen sich offenbar die Kugeln, welche die viereckigen Zahlen darstellen, zu einer viereckigen Pyramide aufschichten, wie es auch in den Zeughäusern wirklich geschieht.

54.

Es ist also leicht, die Anzahl Kugeln in einer dreieckigen und viereckigen Pyramide zu berechnen.



$$s = \frac{n.(n+1).(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$



$$s = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

So viele Kugeln nämlich in der untersten Reihe BC liegen, eben so viele liegen auch in der schräg aufsteigenden Reihe BS und eben so viele Schichten liegen folglich auf einander. Liegen also in der untersten Reihe n Kugeln, so hat man nur die Summe von n Gliedern der dreieckigen und viereckigen Zahlen zu nehmen. Diese ist, wie schon angegeben, für die dreieckige Pyramide $=\frac{n.n+1.n+2}{1\;.\;2\;.\;3}$, und für die viereckige $=\frac{n.n+1.2n+1}{1\;.\;2\;.\;3}$.

Sind die Pyramiden nicht voll, jedoch parallel zur untersten Schicht abgekürzt, und liegen in der untersten Reihe n, in der obersten Reihe m Kugeln, so ist die Zahl der Kugeln in der abgekürzten dreis. Pyramide $=\frac{n.n+1.n+2}{1\;.\;2\;.\;3}-\frac{m.m+1.m+2}{1\;.\;2\;.\;3}$ und in der abgekürzten viers. Pyramide $=\frac{n.n+1.2n+1}{1\;.\;2\;.\;3}-\frac{m.m+1.2m+1}{1\;.\;2\;.\;3}$. Lägen z. B. in der untersten Reihe der vollen dreieckigen Pyramide 20 Kugeln, so ist die Zahl aller $=\frac{20.21.22}{1\;.\;2\;.\;3}=1540$.

55.

Ausser in dreieckigen und viereckigen Pyramiden, werden die Kugeln auch in länglichen Haufen aufgeschichtet, und es ist auch hier leicht, die Anzahl derselben zu berechnen. Liegen nämlich in der obersten Reihe (Rücken) m Kugeln, so liegt diese offenbar auf einer Schicht von zwei Reihen von je $m+1$ Kugeln; diese Schicht enthält also $2(m+1)$ Kugeln und liegt wieder auf einer Schicht von drei Reihen von je $m+2$ Kugeln. Diese dritte Schicht enthält also $3(m+2)$ Kugeln &c. Liegen also in einer Seite eines Seitendreiecks (welches offenbar gleichseitig ist) n Kugeln, so besteht der ganze Haufen aus n Schichten und die unterste Schicht enthält n Reihen von je $m+n-1$ Kugeln.



$$s=\frac{n.(n+1).(3m+2n-2)}{1\;.\;2\;.\;3}$$

Die auf einander folgenden Schichten des ganzen Haufens sind also:

$$\underbrace{m}_{1},\quad \underbrace{2m+2}_{2},\quad \underbrace{3m+6}_{3},\quad \underbrace{4m+12}_{4},\quad \underbrace{5m+20}_{5},\ldots \underbrace{n(m+n-1)}_{n}.$$

Diese Reihe ist offenbar eine arithmetische vom 2ten Range, das summatorische Glied also vom 3ten Range. Mithin: $s = an^3 + bn^2 + cn + d$. Weil aber $1.2.3.a = 2$ und zufolge des § 50 erwähnten Grundes für $n=0$ auch $s=0$ sein muss, so ist $a=\frac{1}{3}$ und $d=0$, folglich näher bestimmt:

$$s = \frac{n^3}{3} + bn^2 + cn.$$

Die noch zu bestimmenden Coefficienten b, c müssen nun so beschaffen sein, dass für $n=1$, $s=m$ und für $n=2$, $s=3m+2$ wird. Dies giebt uns die beiden Bedingungsgleichungen:

$$m = \tfrac{1}{3} + b + c$$

$$3m + 2 = \tfrac{8}{3} + 4b + 2c$$

woraus: $b = \frac{1}{2}m$ und $c = \frac{1}{2}m - \frac{1}{3}$.

Es ist mithin:

$$s = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}mn^2 + \tfrac{1}{2}mn - \tfrac{1}{3}n$$

oder: $$s = \frac{n}{6}\Big\{2(n+1)(n-1) + 3m(n+1)\Big\}$$

$$s = \frac{n.(n+1).(3m+2n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$$

Anmerkung. Vega giebt für diese Formel folgende leichte Gedächtnissregel: Man addire zu dem Rücken des Haufens beide mit ihm gleichlaufenden Grundlinien und multiplicire den dritten Theil der Summe mit der Anzahl Kugeln eines Seitendreiecks, welche Anzahl immer $=\frac{n.\overline{n+1}}{1\ .\ 2}$ ist. Diese Gedächtnissregel passt (wie schon Vega bemerkt) auch für die dreieckige und viereckige Pyramide, wo dann aber bei der viereckigen Pyramide der Rücken nur eine, und bei der dreieckigen sowohl der Rücken, als auch die eine Grundlinie, jede nur eine Kugel hat.



Fünftes Buch.

Convergenz unendlicher Reihen.

56.

Einen Grössenausdruck, welcher nach ganzen und positiven Potenzen einer veränderlichen Grösse x fortschreitet, wie: $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ nennt man die Grundform der Analysis, und es ist eine der wichtigsten Aufgaben dieser Wissenschaft, alle Functionen einer veränderlichen Grösse, welche diese Form nicht haben, wie z. B. a^x, $\sin x$, $\cos x$ &c., in dieselbe umzuschmelzen, weil man aus dieser einfachern Grundform das Wesen und die Eigenschaften der Functionen oftmals deutlicher erkennen, so wie auch den Werth der Function für ein bestimmtes x darnach leichter berechnen kann.

Man kann die Grundform der Analysis, in welcher die beständigen Coefficienten $a, b, c \ldots$ beliebige ganze, gebrochene, positive oder negative endliche Zahlen, Null nicht ausgenommen, sein können, gleichnissweise ein allgemeines Zahlensystem nennen, indem in der That jedes besondere darin enthalten ist, z. B. das decadische, für welches $x = 10$ ist, und die Coefficienten $a, b, c \ldots$ einen der Werthe 0, 1, 2, 3 bis 9 haben. So ist z. B.:

$$57034 = 4 + 3.10 + 0.10^2 + 7.10^3 + 5.10^4.$$

Ferner nennt man die Grundform der Analysis eine Form 1sten, 2ten ....$n$ten Grades, je nachdem der höchste Exponent der veränderlichen Grösse 1, 2, 3 .... n ist. $a + bx$ oder bx ist eine Form 1sten Grades, $a + bx + cx^2$; $a + bx^2$ sind Formen zweiten Grades &c.

57.

Dass sich eine Function, welche die Grundform der Analysis nicht hat, auf dieselbe bringen lässt, davon bietet schon die Newton'sche Formel ein vorläufiges Beispiel. So ist z. E.:

$$(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Auf den glücklichen Gedanken aber, alle Functionen auf die Grundform der Analysis zu bringen, mögen wohl zuerst die gebrochenen Functionen geführt haben,*) die man stets als angedeutete Divisionen betrachten und durch wirkliche Division in solche Reihen verwandeln kann, welche diese Grundform haben.

Nehmen wir als Erläuterungs-Beispiel die einfache gebrochene Function $\frac{1}{1-x}$ und dividiren, wie es in der Algebra § 321 gelehrt worden, mit dem Nenner $(1 - x)$ in den Zähler (1), so ist der Quotient 1, und nachdem man hiermit den Divisor multiplicirt und das Product vom Dividendus (1) subtrahirt, bleibt x als Rest. Dividirt man abermals in diesen Rest &c., so kommt nach und nach:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

Es ist klar, dass die Ausdrücke rechter Hand, wenn man sie einrichtet alle auf die ursprüngliche Form $\frac{1}{1-x}$ zurückführen, und dass folglich die Zulässigkeit dieser Art Division dadurch

*) Nicol. Kauffmann, auch Mercator genannt, ein Holsteiner, soll zuerst auf die Idee der unendlichen Reihen gekommen sein, in welche er die gebrochenen Functionen verwandelte, um sie leichter integriren zu können.

gerechtfertigt ist, und dass man auf beiden Seiten gleiche Werthe erhalten muss, was für eine bestimmte Zahl man auch statt der veränderlichen Grösse x annehmen mag.

58.

Bei solchen Umformungen der Functionen kommt man aber in der Regel auf solche gesetzmässig fortschreitende Reihen, die kein Ende nehmen und deshalb unendliche (transcendente) Reihen genannt werden. Es fragt sich deshalb, ob in materieller Hinsicht, d. h. wenn man für die veränderliche Grösse einen bestimmten Werth setzt, der Betrag (Summe) der unendlichen Reihe oder vielleicht auch schon ein Stück davon dem wirklichen Betrage der Function, wenn auch nicht vollkommen, so doch näherungsweise und für die Praxis genügend gleich ist, oder nicht.*) Dies hängt von einem wohl zu beachtenden Umstande ab, nämlich: ob die unendliche Reihe convergent oder divergent ist.

59.

Eine gesetzmässige unendliche Reihe, d. h. eine solche, deren Glieder nach einem bestimmten Gesetz (allgemeines Glied) entspringen, heisst convergent, wenn, wie viel Glieder vom Anfang an man auch summiren wollte, die Summe derselben eine gewisse bestimmte Grenze s nie überschreiten, sich ihr jedoch immer mehr und mehr nähern kann. Nehmen wir z. B. die gesetzmässige Reihe:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots \text{in infinitum,}$$

deren allgemeines Glied $\frac{1}{2^n}$, so wissen wir schon aus der

*) Unendliche Reihen kommen schon in der Arithmetik vor, z. B.: $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$, jedoch kennt man hier das Gesetz nicht, nach welchem die Ziffern der Wurzel auf einander folgen.

Algebra § 329, dass die Summe immer grösser wird, je mehr Glieder man zusammenfasst, dass trotzdem aber die Summe die Zahl 1 nie überschreiten kann. Die fragliche unendliche Reihe ist mithin convergent und ihre Summe = 1.

60.

Damit eine unendliche Reihe convergent sei, ist offenbar nothwendig, dass ihre Glieder, bis zum Verschwinden, immer kleiner und kleiner werden. Aber dies Merkmal allein genügt noch nicht. Denn betrachten wir einmal die Reihe:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\,\Big|+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}\,\Big|+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{12}\,\Big|+\ldots+\tfrac{1}{24}\,\Big|+\ldots+\frac{1}{\infty}$$

deren Glieder bis zum Verschwinden abnehmen. Denken wir uns diese Reihe, wie angedeutet (von den beiden ersten Gliedern an), in Gruppen von 3, 6, 12, 24, 48 &c. Glieder getheilt, so ist klar, dass, wenn jedes Glied in einer Gruppe auch nur den Werth des letzten darin hätte, dennoch die Summe einer jeden Gruppe = $\frac{1}{2}$ sein würde. Da nun die Zahl der Gruppen unendlich ist, so ist auch die Summe der ganzen Reihe (weil $\infty \,.\, \frac{1}{2} = \infty$) unendlich gross, und also die Reihe nicht convergent, sondern divergent, d. h. ihre Summe ist unendlich gross, mithin keine bestimmte Summe.

61.

Ein leichtes Kennzeichen, woran man in den meisten Fällen die Convergenz einer gesetzmässigen unendlichen Reihe erkennen kann, giebt uns die einfache geometrische Progression:

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots + ax^{n-1}$$

Denn bezeichnen wir die Summe von n Gliedern mit s, so ist bekanntlich (Algebra § 256):

$$s = \frac{ax^n - a}{x - 1}$$

$$\text{oder: } s = \frac{a - ax^n}{1 - x}$$

Ist nun der Exponent $x = 1$, so ist für $n = \infty$ die Summe der unendlichen Progression $a + ax + ax^2 + \ldots + \ldots ax^{n-1} = \infty \,.\, a$, also unendlich (Algebra § 328), mithin die unendliche Reihe:

$$a + ax + ax^2 + \ldots + \ldots + ax^{n-1} + \ldots$$

für $x = 1$ divergent, und dies ist sie offenbar um so mehr, wenn $x > 1$. Ist aber der Exponent ein echter Bruch, also $x < 1$, so wird für $n = \infty$ in obiger Gleichung, die man auch so schreiben kann:

$$s = \frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x}$$

der Factor $x^\infty = 0$ *) und die Summe der unendlichen Progression $= \frac{a}{1-x}$. Eine unendliche geometrische Progression, deren Exponent ein echter Bruch ist, ist folglich immer convergent. Um also zu erkennen, ob eine gesetzmässig fortschreitende unendliche Reihe convergent ist, dividire man nur mit einem Gliede in das nächstfolgende; ist dann der Quotient ein echter Bruch und bleibt für die ganze Reihe immer derselbe, so ist diese Reihe offenbar eine geometrische Progression und, wie eben bewiesen, convergent, und dies um so mehr, wenn der fragliche Quotient immer kleiner wird. Wird aber der Quotient immer grösser und zuletzt > 1, so ist die Reihe divergent. **)

---

*) Sei z. B. $x = \frac{1}{5} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}}$, so ist $(\frac{1}{5})^\infty = \frac{1}{(1+\frac{1}{4})^\infty} = \frac{1}{1+\infty\,.\,\frac{1}{4}+\ldots} = \frac{1}{\infty} = 0$.

**) Die Untersuchungen über Convergenz oder Divergenz solcher unendlichen Reihen, bei welchen der erwähnte Quotient immer grösser und zuletzt $= 1$ wird, führen auf sehr grosse Weitläufigkeiten. Da aber alle solche Reihen nur rein wissenschaftliches und kein practisches Interesse haben, indem sie, in den Fällen wo sie convergent sind, doch immer so schlecht convergiren, dass man mehrere tausend, ja mehrere Millionen Glieder addiren müsste, um die Summe nur bis auf zehn Decimalen genau zu

Zusatz. Wenn also in einer unendlichen Reihe $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 +$ &c., welche nach ganzen positiven Potenzen der veränderlichen Grösse x fortschreitet, — und mit solchen Reihen haben wir es in der Folge nur zu thun — die Coefficienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ endliche Zahlen sind, so ist die Reihe für jeden Werth von $x < 1$ immer convergent. Denn bezeichnen wir den grössten Coefficienten mit a und legen allen Coefficienten diesen Werth bei, so ist, wie eben gezeigt, die unendliche geometrische Progression $a + ax + ax^2 +$ &c, für $x < 1$ convergent, um so mehr also die fragliche Reihe.

62.

In § 57 erhielten wir durch fortgesetzte Division:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}.$$

Setzen wir für die veränderliche Grösse x einen beliebigen echten Bruch, so ist für $n = \infty$, das sogenannte Restglied $\frac{x^n}{1-x}, = 0$. Die dadurch hervorgerufene unendliche Reihe hat also für $x < 1$ (weil dann convergent) wirklich Sinn, d. h. wir können das Restglied weglassen, die unendliche Reihe statt ihrer Quelle $\frac{1}{1-x}$ und umgekehrt setzen, weil für $x < 1$ die Function $\frac{1}{1-x}$ wirklich die Summe der unendlichen Reihe ist. Setzt man z. B. $x = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ &c., so hat man:

$$2 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots \text{ in infinitum}$$
$$3 = 1 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{9} + \tfrac{8}{27} + \ldots \quad \text{do.}$$

63.

Jede unendliche Reihe mit regelmässig abwechselnden Vor-

erhalten, so können wir alle diese Reihen ganz unbeachtet lassen. Von practisch brauchbaren unendlichen Reihen verlangt man immer eine so starke Convergenz, dass in der Regel schon die Zusammenfassung der zwei, drei oder vier ersten Glieder genügt. (§ 170.)

zeichen, und deren Glieder bis zum Verschwinden abnehmen, ist immer convergent, so z. B. die Reihe:

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-+\ldots\pm\frac{1}{2n-1}$$

Denn hier ist zuvor klar, dass ihre Summe positiv sein muss, weil die Reihe sich so schreiben lässt: $(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\ldots$ oder so: $2\left\{\frac{1}{1.3}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{9.11}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n-1)}\right\}$. Ferner ist klar, dass die Summe kleiner, als das erste Glied ist, weil immer mehr subtrahirt, als wieder zugelegt wird, oder weil die als positiv erkannte Reihe sich auch so schreiben lässt: $1-(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})-(\frac{1}{7}-\frac{1}{9})\ldots$ Diese Reihe ist mithin convergent.

64.

Wenn zwei nach ganzen Potenzen einer veränderlichen Grösse x fortschreitende endliche, oder auch convergente unendliche Reihen: $a+bx+cx^2+dx^3+\ldots$ und $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots$ für jeden Werth von x gleiche Resultate geben sollen, so müssen nothwendig die Coefficienten von gleich hohen Potenzen der veränderlichen Grösse einander gleich sein. In Zeichen: wenn für jeden Werth von x

$$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots \quad (1)$$

sein soll, so muss nothwendig sein:

$$a=\alpha;\ b=\beta;\ c=\gamma;\ d=\delta \text{ \&c.}$$

Dieser Satz, der in der That an sich so einfach und evident ist, dass man ihn wohl nicht mit Unrecht einen Grundsatz nennt, lässt sich doch folgendermaassen beweisen.

Da nämlich die Gleichung (1) für jeden Werth von x bestehen soll, so setze man $x=0$, alsdann werden alle mit x multiplicirten Glieder $=0$ und es bleibt dann: $a=\alpha$. Lässt man also auf beiden Seiten diese gleichen Grössen weg, so folgt aus Gleichung (1):

$$bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots$$

oder, indem man durch x dividirt, wo aber, um den vieldeutigen Ausdruck $\frac{0}{0}$ zu vermeiden, $x > 0$ sein muss:

$$b + cx + dx^2 + \ldots = \beta + \gamma x + \delta x^2 + \ldots$$

Setzt man in dieser Gleichung wieder $x = 0$, so folgt: $b = \beta$. Auf dieselbe Weise ergiebt sich $c = \gamma$, $d = \delta$ &c.

Anmerkung. Aus der Gleichung (1) folgt noch:

$$(a - \alpha) + (b - \beta)x + (c - \gamma)x^2 + \ldots = 0.$$

Wenn also eine nach ganzen positiven Potenzen einer veränderlichen Grösse x fortschreitende Reihe für jeden Werth von $x = 0$ sein soll, in Zeichen:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

so muss nothwendig jeder Coefficient A, B, C.... $= 0$ sein. Dieser Satz ist im Grunde derselbe wie der vorhergehende, und kann auch eben so bewiesen werden. Denn setzt man in (2) $x = 0$, so folgt $A = 0$ und es bleibt:

$$Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots = 0$$

oder durch x dividirt:

$$B + Cx + Dx^2 + \ldots = 0.$$

Setzt man jetzt wieder $x = 0$, so ist auch $B = 0$ &c. $C = 0$, $D = 0$ ...

Zusatz. Es folgt hieraus, dass eine stetige Function einer veränderlichen Grösse, x, jedenfalls nur auf Eine Art in eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende convergente Reihe entwickelt werden kann. Denn angenommen, man habe $\varphi(x)$ nach zwei durchaus verschiedenen Methoden entwickelt, und es seien:

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.$$
$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots.$$

die beiden Reihen und deren beiderseitige Summen, so lange sie convergiren, einander gleich, so muss nach dem Vorhergehenden nothwendig $a = \alpha, b = \beta$ &c. sein.

Nach dieser Vorbereitung können wir nun zu der Verwandlung der Functionen in Reihen schreiten. Man merke sich aber, dass, wenn die Reihen, wie fast immer der Fall ist, unendlich (transcendent) werden, dieselben dann, wenn sie Sinn haben und ihrer Quelle gleich geachtet werden sollen, nothwendig convergent sein müssen.

Sechstes Buch.

Verwandlung der Functionen in Reihen.

Recurrirende Reihen.

65.

Hat man eine gebrochene Function, deren Zähler und Nenner nach ganzen steigenden Potenzen derselben veränderlichen Grösse x geordnet sind, z. B. $\frac{a+bx+cx^2}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3}$ und wo das erste Glied im Nenner constant ist (kein x enthält), so kann man eine solche Function, wie schon §. 57 angedeutet, durch fortgesetzte Division in eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln. So giebt z. B. $\frac{2+5x}{1+2x-3x^2}$

$$
\begin{array}{l|l}
1+2x-3x^2 & 2+5x \quad = 2+x+4x^2-5x^3+\dots \\
 & \underline{2+4x-6x^2} \\
 & \quad x+6x^2 \\
 & \quad \underline{x+2x^2-3x^3} \\
 & \qquad 4x^2+3x^3 \\
 & \qquad \underline{4x^2+8x^3-12x^4} \\
 & \qquad\quad -5x^3+12x^4
\end{array}
$$

Es ist mithin:

$$\frac{2+5x}{1+2x-3x^2}=2+x+4x^2-5x^3+\dots$$

Auf diese Weise, nämlich durch gewöhnliches Dividiren, erhält man die Reihe (Quotient) am leichtesten, aber es tritt so das Gesetz derselben nicht hervor, nach welchem man sie beliebig weit fortsetzen kann. Um dieses zur vollständigen Kenntniss der Reihen nothwendige Gesetz zu erhalten, wendet man die zuerst von Cartesius angegebene, sogenannte Methode der unbestimmten Coefficienten an, welche man wegen ihrer grossen Fruchtbarkeit und schöpferischen Kraft nicht mit Unrecht den Geist der Analysis genannt hat.

66.

Da wir nämlich im Voraus überzeugt sind, dass der Quotient aus $\frac{2+5x}{1+2x-3x^2}$ (wenn man, wie angegeben, mit dem Nenner in den Zähler dividirt) nothwendig eine Reihe geben muss, welche nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitet, so kann man sie vorläufig fingiren. Wir setzen nämlich:

$$\frac{2+5x}{1+2x-3x^2} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

Um die noch unbestimmten (unbekannten) Coefficienten A_0, A_1, $A_2 \dots$ zu bestimmen, *) multiplicire man auf beiden Seiten mit dem Nenner der gebrochenen Function, so kommt:

$$2+5x = (1+2x-3x^2)(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots)$$

oder die nur angedeutete Multiplication wirklich ausgeführt, kommt:

$$2+5x = \left\{\begin{array}{l|l|l|l|l} A_0 + A_1 & x + \ \ A_2 & x^2 + \ \ A_3 & x^3 + \ \ A_4 & x^4 + \dots \\ \ \ +2A_0 & \ \ +2A_1 & \ \ +2A_2 & \ \ +2A_3 & \ \ + \dots \\ & \ \ -3A_0 & \ \ -3A_1 & \ \ -3A_2 & \ \ + \dots \end{array}\right.$$

*) Weil für jeden Werth von x der vorgegebene Bruch die Summe der ganzen Reihe sein soll, so kann man den ersten Coefficienten A_0 auch dadurch bestimmen, indem man beiderseits $x=0$ setzt, alsdann werden alle in x multiplicirten Glieder $=0$ und es bleibt $\frac{2}{1}=A_0$.

Nehmen wir nun vorläufig an, die in's Unendliche fortlaufende Reihe rechter Hand sei convergent (um das Restglied weglassen zu können), so haben wir darauf zu bestehen, dass für jeden Werth von x die rechte Seite dasselbe Resultat giebt, wie die linke. Dann müssen aber beiderseits die Coefficienten von gleich hohen Potenzen von x gleich sein (§ 64). Mithin ist (weil man $2+5x=2+5x+0.x^2+0.x^3+\ldots$ setzen kann):

$$\begin{aligned} &A_0=2 \\ &A_1+2A_0=5 \\ &A_2+2A_1-3A_0=0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

oder so geschrieben:

$$\begin{aligned} &A_0=2 \\ &A_1=5-2A_0=5-4=1 \\ &A_2=-2A_1+3A_0=-2+6=4 \\ &A_3=-2A_2+3A_1=-8+3=-5 \\ &A_4=-2A_3+3A_2=10+12=22 \end{aligned}$$

Man sieht hieraus, dass, nachdem die beiden ersten Coefficienten A_0, A_1 gefunden sind, man die folgenden alle nach einer und derselben Regel ($A_n=-2A_{n-1}+3A_{n-2}$) erhält, indem man nämlich den nächstvorhergehenden mit -2 und den vorvorhergehenden mit $+3$ multiplicirt. Dies ist auch der Grund, weshalb man alle durch Division entstehenden Reihen recurrirende (zurücklaufende) nennt, obgleich es eigentlich nicht die Reihe, sondern der Rechner ist, welcher recurrirt. Es erhellet wohl leicht, dass die Recursionsregel mit der Anzahl der Glieder im Nenner der gebrochenen Function wächst.

67.

Die Hauptfragen nun, welche bei einer recurrirenden Reihe gestellt werden können, sind folgende drei:

1) Aus dem erzeugenden Bruch der recurrirenden Reihe das allgemeine Glied derselben zu finden, nach welchem man jedes beliebige Glied derselben direct berechnen kann, d. h. ohne die vorhergehenden erst zu suchen.

2) Die Summe von beliebig vielen Gliedern zu bestimmen.

3) Zu finden, ob eine vorliegende unendliche Reihe eine recurrirende ist, und wenn sie als solche erkannt, daraus den erzeugenden Bruch zu finden.

Mit den recurrirenden Reihen haben sich besonders Bernouilli und Moivre viel beschäftigt.

Ob eine recurrirende Reihe convergent ist, entscheidet man nach der § 61 gegebenen Regel. Da dies aber sehr selten der Fall ist, so haben die recurrirenden Reihen fast nur ein rein wissenschaftliches Interesse, weshalb wir auch nicht bei ihnen verweilen dürfen.

Die folgenden fünf Reihen aber sind von der grössten Wichtigkeit, theils schon an sich selbst, theils wegen der wichtigen Forderungen und Hülfsmittel, die man daraus zieht, und weil auf sie die ganze Differentialrechnung gegründet werden kann.

Anmerkung 1. Bei der Entwickelung der Functionen in unendliche Reihen nach der vorhin gezeigten Methode der unbestimmten Coefficienten wird die unendliche Reihe immer erst fingirt, und der Verlauf der Rechnung muss dann zeigen, ob eine solche Reihe, welche die Grundform der Analysis hat, möglich ist. Werden dann die vorläufig fingirten Coefficienten dadurch bestimmt, dass man, wie in § 66, zwei Grundformen mit einander vergleicht und die Coefficienten von gleich hohen Potenzen derselben veränderlichen Grösse gleich setzt, so ist, wenn die unendliche Reihe sich als convergent ergiebt, alles klar und bündig. Bestimmt man aber die zu findende Reihe aus gewissen Eigenschaften der Function, so muss man sehr vorsichtig und jedenfalls überzeugt sein, dass die fraglichen Eigenschaften der Function eigenthümlich sind.

Anmerkung 2. Es kann eine Function einer veränderlichen Grösse, x, vieldeutig, d. h. so beschaffen sein, dass sie für einen bestimmten Werth von x verschiedene Werthe annimmt. So ist z. B. (Algebra § 326, b) für $x = 15$ die Function $(1+x)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2, = -2, = 2 . \sqrt{-1}, = -2 . \sqrt{-1}$. Eben so (Trigonometrie § 62, a, Note) für $x = \frac{1}{2}$ die Function

Ang. sin x = Ang. sin $\frac{1}{2}$ = 30^0, = 150^0, = 390^0&c. Wenn also eine solche Function sich überhaupt in eine convergente Reihe von der Form $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 +$ &. verwandeln lässt, so kann von einer solchen Reihe jene Vieldeutigkeit nicht verlangt werden. Denn da die Coefficienten α_0, α_1, $\alpha_2, \ldots$, constant sind, so kann die unendliche Reihe für einen solchen Werth von x, für welchen sie convergent ist, doch nur Eine Summe (nicht verschiedene) haben, und deshalb auch nur für denjenigen Werth der Function gelten, welcher mit dieser Summe übereinstimmt.

Binomischer Lehrsatz für jeden Exponenten.

68.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die Function $(1 + x)^p$ auch für den Fall in eine Reihe zu verwandeln, wo der Exponent keine ganze positive Zahl ist. Wir nehmen das Binom in der einfachen Form $1 + x$, weil dies genügt.

Es sei nun zuerst p ein positiver echter oder unechter Bruch, den wir mit $\frac{m}{n}$ bezeichnen wollen. Alsdann ist, weil m eine ganze Zahl und $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots + x^m$ ist (§ 29):

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1+x)^m} = \sqrt[n]{(1 + mx + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots + x^m)}$$

Nehmen wir nun an, die hier geforderte $n$te Wurzel aus $1 + mx + \ldots + x^m$ lasse sich durch eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende convergente Reihe *) ausdrücken, es sei nämlich:

$$\sqrt[n]{(1 + mx + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots + x^m)} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots\ldots$$

*) Dass jedenfalls nur eine solche nach ganzen positiven, und nicht nach negativen oder gebrochenen Exponenten fortschreitende Reihe möglich sein kann, folgt schon aus den Regeln der Variation (§ 19, 2), oder der gemeinen Multiplication, indem die fingirte Reihe $1 + Ax + Bx^2 + \ldots$, auf die $n$te Potenz erhoben, mit $1 + mx + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots$ übereinstimmen muss.

so kommt es zunächst nur darauf an, den ersten Coefficienten A zu bestimmen (weil sich die folgenden daraus ergeben). Dass das erste Glied rechter Hand nothwendig $= 1$ sein muss, folgt daraus, weil für $x = 0$ beiderseits dasselbe Resultat kommen muss, nämlich $\sqrt[n]{1} = 1$. (Vergl. §. 66, Note, und § 67, Anmerkung 2.)

Erhebt man beide Seiten auf die $n$te Potenz, so ist:

$$1 + mx + \frac{m.m-1}{1\;.\;2}x^2 + \ldots = (1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots)^n$$

Es ist nun leicht einzusehen, dass die beiden ersten Glieder von der Entwickelung rechter Hand nothwendig $1 + nAx$ sein müssen;*) denn verwandelt man das in Klammern stehende Polynom in ein Binom, indem man die Summe aller auf 1 folgenden Glieder $= z$ setzt, so ist, weil n eine ganze Zahl:

$$(1 + Ax + Bx^2 + \ldots.)^n = (1 + z)^n = 1 + nz + \frac{n.n-1}{1\;.\;2}z^2 + \ldots.$$

oder, für z wieder seinen Werth gesetzt, kommt:

$$(1 + Ax + Bx^2 + ..)^n = 1 + n(Ax + Bx^2 + ..) + \frac{n.n-1}{1.\,2}(Ax + Bx^2 + ..)^2 + ..$$

Es ist also:

$$1 + mx + \frac{m.m-1}{1\;.\;2}x^2 + \ldots = 1 + nAx + (nB + \frac{n.n-1}{1\;.\;2}A^2)x^2 + \ldots.$$

Da nun die Coefficienten von gleich hohen Potenzen von x gleich sein müssen, so hat man zur Bestimmung des fraglichen ersten Coefficienten A die Gleichung $nA = m$, woraus: $A = \frac{m}{n}$, also A gleich dem Exponenten p. Wäre in $(1+x)^p$ der Exponent p eine negative ganze oder gebrochene Zahl, so ist:

$$(1 + x)^{-p} = \frac{1}{(1 + x)^p} = \frac{1}{1 + px + \ldots} = 1 - px + \ldots$$

*) Dies folgt schon aus § 19, Anmerkung, nach welchem man auch die übrigen Glieder auf einem etwas längern Wege direct bestimmen könnte.

Die wirkliche Division zeigt nämlich, dass auch für diesen Fall der fragliche erste Coefficient A in der Entwickelung von $(1+x)^{-p}$ gleich dem Exponenten sein muss. (§ 65.)

69.

Nehmen wir also an, es gäbe für $(1+x)^p$ eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe und setzen:

$$(1+x)^p = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots (1)$$

so wissen wir jetzt, dass unter allen Umständen, was auch der Exponent p sein möge, der erste Coefficient $A = p$ sein muss. Die übrigen Coefficienten B, C, D... bestimmt man nun leichter nach folgender häufig Anwendung findenden fruchtbaren Methode.

Weil die Coefficienten A, B,... nur von p abhängen und dieselben bleiben müssen, wenn man für die veränderliche Grösse x allerlei Werthe setzt, so setzen wir, um auf eine andere Form zu kommen, in (1) $x+u$ statt x,*) so ist:

$$(1+\overline{x+u})^p = 1 + A(x+u) + B(x+u)^2 + C(x+u)^3 + \ldots$$

Entwickeln wir die rechte Seite nach Potenzen von u, jedoch nur so weit, dass die Coefficienten von u in der ersten Potenz zusammengefasst werden können, indem wir die Coefficienten von u^2, u^3..., die wir mit M, N... bezeichnen wollen, nicht zu kennen brauchen, so kommt:

$$(1+x+u)^p = \begin{cases} 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots \\ \quad Au + 2Bxu + 3Cx^2u + \ldots \\ \quad Mu^2 + Nu^3 + \ldots \end{cases}$$

$= (1+x)^p$

*) Indem man statt der einfachen veränderlichen Grösse x ein Binom $x+u$ setzt (der veränderlichen x einen Zuwachs beilegt), kommt auf beiden Seiten statt x eine zweitheilige Grösse $x+u$, wodurch eine weitere Entwickelung ermöglicht wird, die man nach Potenzen von u fortschreiten lassen kann. Durch diesen einfachen Kunstgriff erhält man zwei verschieden geformte, nach u fortschreitende Reihen, die einander gleich sein müssen &c.

oder, weil $(1+x)^p$ statt der obersten Reihe $1+Ax+Bx+\ldots$ gesetzt werden kann, Gleichung (1):

$$(1+x+u)^p=(1+x)^p+(A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3\ldots)u+Mu^2+Nu^3+\ldots(2)$$

Da nun aber auch $1+x+u=(1+x)\left(1+\frac{u}{1+x}\right)$, mithin:

$$(1+x+u)^p=(1+x)^p\left(1+\frac{u}{1+x}\right)^p$$

und also auch, indem wir in die angenommene Form, Gleichung (1), $\frac{u}{1+x}$ statt x setzen und entwickeln:

$$(1+x+u)^p=(1+x)^p\left\{1+A\frac{u}{1+x}+B\frac{u^2}{(1+x)^2}+\ldots\right\}$$

$$(1+x+u)^p=(1+x)^p+A(1+x)^{p-1}.u+B(1+x)^{p-2}.u^2+\ldots\ldots\ldots(3)$$

Die rechten Seiten in (2) und (3) sind Ausdrücke für eine und dieselbe Grösse, nur in verschiedener Form, was grade beabsichtigt wurde. Sie müssen also, wenn man für x einen ganz beliebigen Werth gesetzt denkt, immer noch für jeden Werth von u einander gleich sein, daher (§ 64):

$$A(1+x)^{p-1}=A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\ldots$$

Multiplicirt man beiderseits mit $1+x$, so ist:

$$A(1+x)^p=(1+x)(A+2Bx+3Cx^2+\ldots)$$

oder für $(1+x)^p$ die Reihe aus (1) gesetzt und beiderseits die Multiplicationen ausgeführt, kommt:

$$A+A^2x+ABx^2+ACx^3+\ldots=\begin{array}{l|l|l|l}A+2B & x+3C & x^2+4D & x^3+\ldots\\ \quad+A & \;+2B & \;+3C & \end{array}$$

Diese Gleichung muss für jeden Werth von x bestehen, mithin ist (weil $A=p$):

$$2B+A=A^2, \text{ woraus } B=\frac{A(A-1)}{1\ .\ 2}=\frac{p.p-1}{1\ .\ 2}$$

$$3C+2B=AB \quad „ \quad C=\frac{B(A-2)}{3}=\frac{p.p-1.p-2}{1\ .\ 2\ .\ 3}$$

$$4D+3C=AC \quad „ \quad D=\frac{C(A-3)}{4}=\frac{p.p-1.p-2.p-3}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}$$

$\vdots$

Diese leichte Recursionsregel springt in die Augen. Daher:

$$(1+x)^p=1+px+\frac{p.p-1}{1\ .\ 2}.x^2+\frac{p.p-1.p-2}{1\ .\ 2\ .\ 3}.x^3+\ldots$$



70.

Das in § 27 entdeckte merkwürdige Gesetz, nach welchem für ganze positive Exponenten die Binomial-Coefficienten sich bilden, gilt also ganz allgemein, nämlich auch für negative und Bruchexponenten. Es leuchtet aber ein, dass für solche Exponenten die Reihe nie abbrechen kann, also eine unendliche wird, jedoch für jeden Werth von $x < \pm 1$ stets convergent, also brauchbar ist. Denn, dividirt man mit jedem Gliede in das nächstfolgende, so werden die Quotienten $px, \frac{p-1}{2}.x, \ldots\ldots \frac{p-n}{n+1}x$ immer kleiner und für $n=\infty, =-x$, weil $\frac{p-n}{n+1}x=\frac{\frac{p}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}x$ und $\frac{\frac{p}{\infty}-1}{1+\frac{1}{\infty}}x=-x$ (§ 61).

Wir haben beim Beweise dieses Satzes des leichtern Schreibens halber angenommen, dass der erste Theil des Binoms 1 ist, weil jede andere Form auf diese zurückgeführt werden kann. So ist z. B. $a+x=a\left(1+\frac{x}{a}\right)$. Mithin $(a+x)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$ und also:

$$(a+x)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{m}{n}.\frac{x}{a}+\frac{\frac{m}{n}.\frac{m}{n}-1}{1\;.\;2}.\frac{x^2}{a^2}+\ldots\right)$$

$$(a+x)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}a^{\frac{m}{n}-1}.x+\frac{m.(m-n)}{1\,.\,2.n^2}a^{\frac{m}{n}-2}x^2+\ldots$$

71.

Aufgabe. Man entwickele folgende Potenzen in Reihen:

$(1\pm x)^{\frac{1}{2}}$; $(1\pm x)^{\frac{1}{3}}$; $(1\pm x)^{-\frac{1}{2}}$; $(1+x)^{\frac{1}{n}}$; $(1-x)^{-1}$; $(1+x)^{-n}$.

Auflösung. Man findet:

$$(1\pm x)^{\frac{1}{2}}=1\pm\tfrac{1}{2}x-\frac{1.1}{2.4}x^2\pm\frac{1.1.3}{2.4.6}x^3-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}x^4\pm-\pm-\ldots\ldots\ldots$$

$$(1\pm)x^{\frac{1}{3}}=1\pm\tfrac{1}{3}x-\frac{1.2}{3.6}x^2\pm\frac{1.2.5}{3.6.9}x^3-\frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}x^4\pm-\pm\ldots\ldots\ldots$$

$$(1\pm x)^{-\frac{1}{2}}=1\mp\tfrac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2\mp\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4\mp\ldots\ldots\ldots$$

$$(1+x)^{\frac{1}{n}}=1+\tfrac{1}{n}x-\frac{n-1}{2n^2}x^2+\frac{n-1\,.\,2n-1}{2\,.\,3\,.\,n^3}x^3-\frac{n-1.2n-1.3n-1}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,n^4}x^4+\ldots$$

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\ldots.$$

$$(1+x)^{-n}=1-nx+\frac{n.n+1}{1\,.\,2}x^2-\frac{n.n+1.n+2}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\ldots.$$

72.

Obgleich die Wichtigkeit des binomischen Lehrsatzes darin liegt, dass er zur Begründung anderer wichtiger Sätze dient, so wollen wir doch beiläufig noch an einem Beispiel zeigen, wie man ihn, in Ermangelung von Logarithmentafeln, benutzen könnte, um aus einer gegebenen Zahl eine beliebige Wurzel zu ziehen. Es soll z. B. $\sqrt[8]{10}$ gefunden werden.

Man zerlege die gegebene Zahl in zwei solche Theile, dass aus dem grössern Theil die Wurzel rational wird.

Es ist z.B. $10 = 8 + 2 = 8(1 + \frac{1}{4})$. Also $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{4})}$, mithin:

$$\sqrt[3]{10} = 2(1 + \tfrac{1}{4})^{\frac{1}{3}} = 2\left(1 + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4} - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} \cdot \frac{1}{4^3} - + \ldots\right)$$

Je mehr Glieder dieser convergenten Reihe man zusammenrechnet, je genauer erhält man $\sqrt[3]{10}$. Durch kleine Kunstgriffe könnte man die Reihe noch viel convergenter machen. Der binomische Lehrsatz hat aber, wie gesagt, einen ganz andern und wichtigern Zweck, als die Wurzeln aus Zahlen zu ziehen, was viel bequemer vermittelst der Logarithmen geschieht.

Exponentialreihe.

73.

Die Function a^x heisst Exponential-Function. In derselben ist die Basis $a > 1$ eine constante, der Exponent x aber eine veränderliche Grösse. Es ist von grosser Wichtigkeit, auch diese Function in eine nach ganzen positiven Potenzen des Exponenten fortschreitende Reihe zu entwickeln.

Ist überhaupt eine solche Reihe möglich, so muss (weil für $x = 0$, $a^0 = 1$ ist) ihr erstes Glied nothwendig 1 sein. Wir setzen also:

$$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Wenden wir jetzt wieder den im § 69 mitgetheilten Kunstgriff an und setzen $x + u$ statt x, so ist:

$$a^{x+u} = 1 + A(x+u) + B(x+u)^2 + C(x+u)^3 + \ldots$$

Entwickeln wir die rechte Seite nur so weit, dass die Glieder mit u in der ersten Potenz in Eins zusammengefasst werden können und setzen für die mit-erscheinende Reihe $1 + Ax + Bx^2 + \ldots$ die Grösse a^x aus (1), so ist:

$$a^{x+u} = a^x + (A + 2Bx + 3Cx^2 + \ldots)u + Mu^2 + \ldots\ldots (2)$$

Nun ist aber auch: $a^{x+u} = a^x \, . \, a^u = a^x (1 + Au + Bu^2 + \ldots)$ mithin auch:

$$a^{x+u} = a^x + Aa^x u + Ba^x u^2 + Ca^x u^3 + \ldots\ldots (3)$$

Die rechten Seiten für (2) und (3) sind Ausdrücke für eine und dieselbe Grösse und müssen für jedes u einander gleich sein, daher (§ 64):

$$Aa^x = A + 2Bx + 3Cx^2 + \ldots$$

oder linker Hand für a^x die Reihe aus (1) gesetzt und mit A multiplicirt, ist für jedes x:

$$A + A^2x + ABx^2 + ACx^3 + \ldots = A + 2Bx + 3Cx^2 + \ldots$$

hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} A &= A \\ 2B &= A^2 \\ 3C &= AB \\ 4D &= AC \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & & B &= \frac{A^2}{1.2} \\ &\text{mithin:} & C &= \frac{AB}{3} = \frac{A^3}{1.2.3} \\ &\quad ,, & D &= \frac{AC}{4} = \frac{A^4}{1.2.3.4} \end{aligned}$$

&c.

Es ist also:

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{1\,.\,2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \frac{A^4x^4}{1.2.3.4} + \ldots (4)$$

Hätten wir den ersten ganz unbestimmt gebliebenen Coefficienten A, so hätten wir auch die übrigen. Wie aber diesen finden? Dass er von der Basis abhängt und sich mit dieser ändert, ist klar; auch lässt sich leicht eine Beziehung zwischen ihm und der Basis aufstellen. Da nämlich die Exponential-Reihe (4) für jeden Werth von x gelten muss, so setze man $x = 1$, dann ist:

$$a = 1 + A + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} + \frac{A^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots (5)$$

Diese Beziehung ist aber offenbar nicht geeignet, um darnach A aus a zu berechnen. Dies kann aber, wie wir gleich sehen werden, mit Hülfe der Logarithmen geschehen. Der Coefficient A ist jedenfalls durch die Basis a bestimmt. Aber auch umgekehrt ist die Basis a durch A bestimmt, und zufolge Gleichung (5) durch eine convergente Reihe zu finden (§ 61). Unter allen Werthen von a muss es einen solchen geben, für welchen der dadurch bestimmte Coefficient A = 1 wird. Bezeichnen wir also die für A = 1 bestimmte Basis mit e, so ist, indem man in (5) A = 1 setzt:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots\ldots (6)$$

$$e = 2{,}7182818284\ldots$$

Setzen wir also in (4) e statt a, so haben wir (weil für diese Basis e der Coefficient A = 1 ist) vorläufig doch eine Exponentialgrösse in eine Reihe verwandelt, nämlich:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots (7)$$

wo nun aber die Basis e die bestimmte Zahl 2,71828... bedeutet. Setzt man $-x$ statt x, so ist auch:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Diese gesetzmässige Reihe kommt auch zum Vorschein, wenn man $e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots}$ durch wirkliche Division entwickelt.

74.

Um nun auch die Exponentialgrösse für jede andere Basis a in eine Reihe verwandeln zu können, setzen wir in der schon gefundenen Form:

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \ldots$$

welche für jeden Werth von x gültig sein muss, $\frac{1}{A}$ statt x, so ist:

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots$$

Für $a^{\frac{1}{A}}$ erhalten wir also denselben Werth, wie für e. Daher die endliche Gleichung:

$$a^{\frac{1}{A}} = e$$
$$e^A = a$$

Bezeichnen wir nun auch hier, wie in der Elementarmathematik allgemein üblich, die Briggs'schen Logarithmen mit log., so folgt aus letzterer Gleichung (Algebra § 285):

$$A \log e = \log a$$

und hieraus: $A = \frac{\log a}{\log e}$

Setzen wir nun diesen, mit Hülfe der Logarithmen für A gefundenen Werth in obige Gleichung, so hat man für eine ganz beliebige Basis a:

$$a^x = 1 + x.\frac{\log a}{\log e} + \frac{1}{1.2}\left(x.\frac{\log a}{\log e}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}.\left(x.\frac{\log a}{\log e}\right)^3 + \ldots$$

welche Reihe für jedes endliche a und x convergent, und worin $\log e = \log 2{,}718281828 = 0{,}4342945$ ist.

75.

Bei allen wirklichen logarithmischen Rechnungen sind die Briggs'schen Logarithmen, wobei bekanntlich 10 die Basis ist, wegen der leicht zu bestimmenden Kennziffer, die bequemsten und immer ausreichend. In der höhern Mathematik aber, jedoch nur in der Theorie, stellen sich noch andere Logarithmen ein, welche die vorhin gefundene Zahl e ($= 2{,}71828\ldots$) zur Basis haben, und zur Unterscheidung von den Briggs'schen die na-

türlichen Logarithmen heissen und durch log. nat. oder kürzer mit dem einfachen Buchstaben l bezeichnet werden.

Weil nun in jedem Logarithmensystem der Logarithmus von $0 = -\infty$; von $1 = 0$, und von der Basis $= 1$ ist, so ist auch, wenn man sich das natürliche Logarithmensystem, dessen Basis e ist, berechnet denkt,*) log. nat. $0 = -\infty$ oder kürzer $l0 = -\infty$; $l1 = 0$; $le = 1$ (weil $e^{-\infty} = 0$; $e^0 = 1$; $e^1 = e$). Nehmen wir also in der vorhin gefundenen Exponentialreihe statt der Briggs'schen Logarithmen die natürlichen, so schreibt man diese Reihe $\left(\text{weil } \frac{\log. a}{\log. e} = \frac{\log.\text{nat}. a}{\log.\text{nat}. e} = \frac{la}{le} = \frac{la}{1}\right)$ einfacher so:

$$a^x = 1 + x.la + \frac{(x.la)^2}{1.2} + \frac{(x.la)^3}{1.2.3} + \ldots$$

Logarithmische Reihe.

76.

Obgleich keine Logarithmen-Systeme mehr zu berechnen sind, indem die Arbeit schon geschehen, so ist es doch für die Theorie wichtig, auch die logarithmischen Functionen log. $(1+x)$ und $l(1+x)$ in Reihen zu entwickeln.**) Wir nehmen zuerst letztere Function, nämlich den natürlichen Logarithmus, dessen Basis e. Dem Begriffe der Logarithmen zufolge ist nun: $(1+x)^n = e^{n.l(1+x)}$ ***) und, indem man für die rechte Seite die entsprechende Reihe setzt (Gleich. 7, § 73):

---

*) Wir werden in § 78 zeigen, wie man in den seltenen Fällen, wo man von einer Zahl den natürlichen Logarithmus wirklich haben muss, denselben leicht vermittelst der Briggs'schen Logarithmen finden kann.

**) Der Logarithmus einer eintheiligen Grösse, nämlich lx, lässt sich nicht in eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln, weil eine solche Reihe für $x = 0$ und für $x = 1$ nicht $-\infty$ und 0 geben kann.

***) Denn nimmt man beiderseits die natürlichen Logarithmen, so hat man: $n.l(1+x) = n.l(1+x).le = n.l(1+x)$, weil $le = 1$. Die hier folgende kurze Ableitung der logarithm. Reihe hat zuerst Cauchy gegeben. (Cours d'analyse.)

$$(1+x)^n = 1 + n\, l(1+x) + \frac{[n\, l(1+x)]^2}{1\,.\,2} + \ldots$$

$$\frac{(1+x)^n - 1}{n} = l(1+x) + \frac{n\,.\,[l(1+x)]^2}{1\,.\,2} + \ldots\ldots (1)$$

Ferner ist auch für $x < \pm 1$, für jeden Werth von n (§ 70):

$$(1+x)^n - 1 = nx + \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2} x^2 + \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3} x^3 + \ldots$$

$$(1+x)^n - 1 = nx - \frac{n(1-n)}{1\,.\,2} x^2 + \frac{n(1-n)(2-n)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,x^3 - \ldots$$

$$\frac{(1+x)^n - 1}{n} = x - (1-n)\frac{x^2}{2} + (1-n)\left(1 - \frac{n}{2}\right)\frac{x^3}{3} - \ldots (2)$$

Die Reihen (1) und (2) sind Ausdrücke für eine und dieselbe Grösse, sie müssen also für $x < 1$ für jeden positiven Werth von n gleich sein, daher:

$$l(1+x) + \frac{n[l(1+x)]^2}{1\,.\,2} + \ldots = x - (1-n)\,.\,\frac{x^2}{2} + (1-n)\left(1 - \frac{n}{2}\right).\,\frac{x^3}{3} - \ldots$$

Lässt man n bis zu Null abnehmen, so ist:

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \ldots\ldots (3)$$

Diese sogenannte logarithmische Reihe ist aber, wie man sieht, nur convergent für $x \leqq 1$.*)

---

*) Will man diese logarithmische Reihe nach der Methode der unbestimmten Coefficienten ableiten, so setze man, weil das erste Glied den Factor x enthalten muss (indem für $x = 0$ auch $l(1+x) = 0$):

$$l(1+x) = ax + bx^2 + cx^3 + \&c.$$

Die Coefficienten a, b, c.... sind durch die Basis des Logarithmen-Systems bestimmt. Nehmen wir das sogenannte natürliche System, dessen Basis $e = 2{,}7182\ldots$, so ist auch, weil die fingirte Reihe der natürliche Logarithmus von der Zahl $1 + x$ sein soll:

Setzt man $x = 1$, so ist:

$$l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + - \ldots$$

$$l2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \ldots + \frac{1}{(2n-1).2n} + \ldots$$

$1 + x = e^{ax + bx^2 + cx^3 + \ldots}$ oder [§ 73, (7)]:

$$1 + x = 1 + ax + bx^2 + \ldots + \frac{(ax + bx^2 + \ldots)^2}{1\,.\,2} + \frac{(ax + bx^2 + \ldots)^3}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$1 + x = 1 + ax + \left.\begin{matrix} b \\ \frac{a^2}{1.2} \\ \end{matrix}\right| \begin{matrix} x^2 + c \\ + \frac{2ab}{1.2} \\ \frac{a^3}{1.2.3} \end{matrix} \left| \begin{matrix} x^3 + \ldots \\ + \ldots \\ + \ldots \end{matrix}\right.$$

Hieraus ergiebt sich zuerst $a = 1$ (§ 64). Die übrigen Coefficienten bestimmt man nun leichter durch den § 69 gezeigten Kunstgriff. Aus:

$$l(1 + x) = x + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

folgt: $l(1 + x + u) = (x + u) + b\,(x + u)^2 + \ldots$

$$l(1 + x + u) = \begin{cases} x + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots \\ (1 + 2bx + 3cx^2 + \ldots)\, u + Mu^2 + \ldots \end{cases}$$

$$l\,(1 + x + u) = l\,(1 + x) + (1 + 2bx + 3cx^2 + \ldots)\, u + Mu^2 + \ldots \quad (2)$$

Nun ist auch: $1 + x + u = (1 + x)\left(1 + \frac{u}{1 + x}\right)$ mithin:

$l(1 + x + u) = l\,(1 + x) + l\left(1 + \frac{u}{1 + x}\right)$ oder, indem man in (1) $\frac{u}{1+x}$ statt x setzt.

$$l(1 + x + u) = l\,(1 + x) + \frac{u}{1+x} + \frac{b\,.\,u^2}{(1+x)^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Die Reihen (2) und (3) müssen für jeden Werth von u einander gleich sein, daher:

$$\frac{1}{1+x} = 1 + 2bx + 3cx^2 + 4dx^3 + \ldots$$

Multiplicirt man beiderseits mit $1 + x$, so ist:

$$1 = \left\{ \begin{matrix} 1 + 2b \\ 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x + 3c \\ + 2b \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x^2 + 4d \\ + 3c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x^4 + \ldots \\ + \ldots \end{matrix} \right.$$

$2b + 1 = 0$, $3c + 2b = 0$ &c, woraus: $b = -\tfrac{1}{2}$, $c = \tfrac{1}{3}$, $d = -\tfrac{1}{4}$ &c. also:

$$l(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots$$

Diese Reihe für $l2$ ist ein wahres Muster von schlechter Convergenz. Um ihre Summe nur bis auf die siebente Decimale genau zu erhalten, müsste man schon mehr als tausend Glieder zusammenfassen; denn das tausendste Glied ist $= \frac{1}{(2000-1)2000} = 0{,}0000002\ldots$ und hat also noch Einfluss auf die siebente Decimale.

77.

Beiläufig wollen wir hier noch zeigen, wie sich aus der logarithmischen Reihe eine sehr convergente Reihe ableiten lässt, nach welcher man, wenn es noch erforderlich wäre, sowohl die natürlichen, als auch die Briggs'schen Logarithmen ohne Vergleich leichter berechnen könnte, als nach der, in der Algebra gezeigten, elementaren Methode.

Setzen wir in der Reihe:

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots\ldots (1)$$

$-x$ statt x, so ist auch (indem man in (1), (2), (3) § 76, $-x$ statt $+x$ gesetzt denkt):

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

welche ebenfalls für $x < 1$ convergent ist und ein negatives Resultat giebt, weil die Logarithmen von echten Brüchen negativ sind.

Subtrahirt man beide Gleichungen und beachtet, dass $l(1+x) - l(1-x) = l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (Algebra § 278), so kommt:

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right)\ldots\ldots (3)$$

Setzen wir hierin $\frac{1+x}{1-x} = z$, so ist $x = \frac{z-1}{z+1}$ und:

$$lz = 2\left\{\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right\}\ldots\ldots (4)$$

Nach dieser zwar sehr langsam convergirenden Reihe könnte man den natürlichen Logarithmus einer beliebigen Zahl z berechnen. Wollte man aber das ganze natürliche Logarithmensystem haben, so würde es ungemein viel leichter sein, die Logarithmen successive für die unmittelbar auf einander folgenden Zahlen 1, 2, 3, 4 .... zu berechnen, indem man dann vorhergegangene Rechnungen für die folgenden benutzen kann. Eine für diesen Zweck sehr convergente Reihe ergiebt sich, wenn man in (3) $\frac{1+x}{1-x}=\frac{p+1}{p}$ und also $x=\frac{1}{2p+1}$ setzt. Dann ist:

$$l\left(\frac{p+1}{p}\right)=2\left(\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{3(2p+1)^3}+\frac{1}{5(2p+1)^5}+\ldots\right),$$

oder, weil $l\left(\frac{p+1}{p}\right)=l(p+1)-lp$:

$$l(p+1)=lp+2\left(\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{3(2p+1)^3}+\frac{1}{5(2p+1)^5}+\ldots\right)\ldots(5)$$

Setzt man hierin nach und nach $p=1, 2, 3\ldots$ und berücksichtigt, dass $l1=0$; $l4=l2+l2$; $l6=l2+l3$ ist &c., so hat man:

$$l2=l1+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\ldots\right)=0{,}69314718\ldots$$

$$l4=2l2=1{,}38629436\ldots$$

$$l5=l4+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\ldots\right)=1{,}60943791\ldots$$

$$l10=l2+l5=2{,}30258509\ldots$$

Die Reihe (5) wird offenbar desto convergenter, je grösser p wird. Wollte man z. B. die Logarithmen nur bis auf fünf Decimalen genau haben, so würde schon von der Zahl $p=50$ an das zweite Glied nicht mehr in Betracht kommen.

78.

Obgleich in der höhern Mathematik immer nur natürliche Logarithmen vorkommen, und dieses natürliche System, wie

eben gezeigt, nach der Reihe (5) auch wirklich berechnet worden (und unter andern in den Callet'schen Tafeln mit eingetragen ist), so kann man dennoch dieses natürliche Logarithmensystem recht gut entbehren, indem erstens für wirkliche logarithmische Ziffernrechnungen die gewöhnlichen Briggs'schen Logarithmen viel bequemer sind, und zweitens in den seltnern Fällen, wo die natürlichen Logarithmen wirklich selbst erforderlich sind, dieselben leicht aus den Briggs'schen, so wie auch umgekehrt die Briggs'schen Logarithmen aus den natürlichen abgeleitet werden können und bei der neuern Berechnung (von Vega, Callet) auch wirklich abgeleitet worden sind. Dazu ist nur die Kenntniss des natürlichen Logarithmus von 10 erforderlich, den wir zu diesem Zweck in § 77 eigens berechnet haben.

Bedeutet nämlich n den natürlichen und b den Briggs'schen Logarithmus einer und derselben Zahl N, so dass also $10^b =$ N und auch $e^n =$ N, mithin $10^b = e^n$ ist, so kommt, wenn man beiderseits die natürlichen Logarithmen nimmt und beachtet, dass $le = 1$,

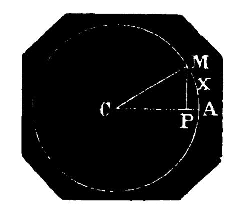
$$b . l10 = n$$

$$\text{hieraus:} \quad b = \frac{1}{l10} . n$$

d. h. man erhält den Briggs'schen Logarithmus b einer beliebigen Zahl N, indem man den natürlichen Logarithmus n derselben Zahl mit dem sogen. Modulus $M = \frac{1}{l10} = 0{,}434294482..$ multiplicirt, und umgekehrt erhält man den natürlichen Logarithmus n einer beliebigen Zahl, wenn man den Briggs'schen Logarithmus b derselben Zahl durch den Modulus $\frac{1}{l10} = 0{,}43429...$ dividirt (oder mit $l10 = 2{,}3025850929....$ multiplicirt). Wegen ihrer grössern Basis (10) sind die Briggs'schen Logarithmen offenbar immer kleiner, als die natürlichen (die Zahl 1 ausgenommen, indem sowohl log. $1 = 0$, als auch $l1 = 0$).

Kreisfunctionen.

79.



Setzt man den Radius CM $= 1$, so ist für einen Bogen $\widehat{AM} = x$ schon die auf CA senkrechte Linie MP der Sinus und CP der Cosinus dieses Bogens x. Die Frage ist nun, ob sowohl $\sin x$ als $\cos x$, beide als Functionen des veränderlichen Bogens x gedacht, sich in Reihen entwickeln lassen, die nach ganzen positiven Potenzen des Bogens x fortschreiten. *)

Fingiren wir vorläufig diese Reihen und setzen:

$$\sin x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$
$$\cos x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

so ist zuvor klar, dass, wenn beide Reihen überhaupt möglich sind, nothwendig $A_0 = 0$ und $a_0 = 1$ sein muss. Denn da für jeden Werth von x rechter Hand dasselbe Resultat kommen muss, wie linker Hand, so setze man $x = 0$, so kommt (weil dann alle in x, $x^2 \ldots$ multiplicirten Glieder $= 0$ sind) $\sin 0 = A_0$ und $\cos 0 = a_0$, woraus, weil $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$, auch $A_0 = 0$ und $a_0 = 1$. Beide Reihen wären also etwas näher bestimmt:

$$\sin x = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots (1)$$
$$\cos x = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots (2)$$

Aus der Gleichung (1) folgt:

$$\frac{\sin x}{x} = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots$$

*) Den Bogen x muss man sich hier nicht in Graden, sondern in Theilen des Halbmessers ausgedrückt denken (Trigonometrie § 62a). Kämen z. B. auf den Bogen AM 18°, so wäre die Länge desselben, nämlich $x = \frac{\pi}{10} = 0{,}314159\ldots$ Der Grund, dass hier auch der Bogen x in Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden muss, liegt darin, weil in jeder Gleichung alle Glieder gleichartig sein müssen und die trigonometrische Function eines Bogens, wie $\sin x$, $\cos x$ &c., als unbenannte Zahl (Trigonometrie § 7) nicht gleich einer Summe von Graden sein kann.

Nun ist zwar (weil der Sinus kleiner als der Bogen) der Quotient, $\frac{\sin x}{x}$, immer ein echter Bruch, der aber der Einheit desto näher kommt, je kleiner der Bogen wird (Trigon. § 62b). Lässt man also (in Gedanken) den Bogen x bis zum Verschwinden immer kleiner werden (bis zu Null convergiren), so wird zu gleicher Zeit auch der Bruch $\frac{\sin x}{x}$ der Einheit immer näher und näher kommen und sie zuletzt (für $x = 0$) wirklich erreichen. Für $x = 0$ fallen aber rechter Hand alle Glieder in x weg, und es bleibt noch $\frac{0}{0} = A_1 = 1$. Der Coefficient A_1 muss also nothwendig $= 1$ sein.

Bedenken wir ferner, dass $\sin x$ eine ungrade und $\cos x$ eine grade Function ist (§ 34), weil $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$ (Trigon. § 57), so kommt, wenn man in beiden obigen Gleichungen (1) und (2) $-x$ statt x setzt, indem dann alle Glieder mit ungraden Potenzen ihre Vorzeichen ändern müssen:

$$-\sin x = -A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + - \ldots (3)$$
$$\cos x = 1 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + - \ldots (4)$$

Nun muss für jeden Werth von x die Reihe (2) dasselbe Resultat geben, wie die Reihe (4), was offenbar nur dann möglich ist, wenn die Coefficienten von allen ungraden Potenzen von x Null sind. Kehrt man in (3) die Vorzeichen um, so hat man:

$$\sin x = A_1 x - A_2 x^2 + A_3 x^3 - + \ldots$$

Diese Reihe muss für jeden Werth von x dasselbe Resultat geben, wie die Reihe (1), was offenbar nicht anders möglich ist, als wenn die Coefficienten von allen graden Potenzen Null sind. Ueberhaupt ist unmittelbar einleuchtend, dass eine Reihe für eine grade Function nur grade und für eine ungrade Function nur ungrade Potenzen enthalten kann.

80.

Sind also die beiden Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ möglich, so wissen wir im Voraus, dass erstere mit x anheben und nach

ungraden Potenzen, die andere aber mit 1 anfangen und nach graden Potenzen von x fortschreiten muss. Wir können also gleich einfacher setzen:

$$\sin x = x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + \dots$$
$$\cos x = 1 + ax^2 + bx^4 + cx^6 + \dots$$

Um die Coefficienten A, B... a, b... zu bestimmen, operiren wir folgendermassen:

$$\sin x + \cos x = 1 + x + ax^2 + Ax^3 + bx^4 + \dots$$

Setzen wir, um auf eine andere Form zu kommen, $x + z$ statt x, so ist auch:

$$\sin(x+z) + \cos(x+z) = 1 + (x+z) + a(x+z)^2 + A(x+z)^3 + \dots\dots$$

oder auch (Trigonometrie § 100, 9 und 10):

$$\left.\begin{array}{l}(\sin x + \cos x)\cos z\\(\cos x - \sin x)\sin z\end{array}\right\} = 1 + (x+z) + a(x+z)^2 + A(x+z)^3 + \dots\dots$$

Substituiren wir linker Hand die fingirten Reihen und entwickeln rechter Hand die Potenzen von $x + z$ nur so weit, dass die Glieder mit z in der ersten Potenz zusammengefasst werden können, so haben wir:

$$\left.\begin{array}{l}(1+x+ax^2+Ax^3+..)(\underline{1}+az^2+bz^4+..)\\(1-x+ax^2-Ax^3+..)(z+Az^3+Bz^5+.)\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}1+x+ax^2+Ax^3+\dots\\(1+2ax+3Ax^2+4bx^3+..)z+Mz^2+..\end{array}\right.$$

Das Product linker Hand enthält einen Theil, welcher der obersten Reihe rechter Hand gleich ist. Diese können wir also gegen die unterstrichene Einheit ($\underline{1}$) weglassen. Dividirt man dann beiderseits durch z, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l}(1+x+ax^2+Ax^3+..)(az+bz^3+\dots\dots)\\(1-x+ax^2-Ax^3+..)(1+Az^2+Bz^4+..)\end{array}\right\} = 1+2ax+3Ax^2+\dots+Mz+Nz^2+\dots$$

Denkt man für x einen beliebigen Werth gesetzt, so müssen noch für jeden Werth von z beiderseits gleiche Resultate kommen. Setzen wir also $z = 0$; so muss für jeden Werth von x:

$$1-x+ax^2-Ax^3+bx^4-Bx^5+\dots = 1+2ax+3Ax^2+4bx^3+5Bx^4+\dots$$

sein, mithin (§ 64):

$$2a = -1 \qquad \text{hieraus: } a = -\frac{1}{1.2}$$

$$3A = a \qquad A = -\frac{1}{1.2.3}$$

$$4b = -A \qquad b = \frac{1}{1.2.3.4}$$

$$5B = b$$

$$6c = -B \qquad B = \frac{1}{1.2.3.4.5}$$

&c. $\qquad\vdots$

Die beiden Reihen für sin x und cos x sind also wirklich möglich, und die Coefficienten ergeben sich nach einer deutlichen und einfachen Recursionsregel. Es ist nämlich:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - + \ldots$$

Nach diesen sehr convergenten Reihen könnten nun, wenn es noch nöthig wäre, die trigonometrischen Functionen leicht berechnet werden. Aus den Lehren der Trigonometrie ist bekannt, dass dieses nur für den ersten Quadranten (eigentlich nur von 0 bis $\frac{\pi}{4}$) zu geschehen braucht, indem für grössere Bögen die Werthe der trigonometrischen Functionen periodisch wiederkehren Dass nun aber die für sin x und cos x gefundenen Reihen nicht blos für den ersten Quadranten (was für den rein trigonometrischen Zweck genügend wäre), sondern auch für jeden beliebig grossen Bogen gültig sind und alle Eigenschaften der trigonometrischen Functionen sin x und cos x besitzen, wodurch zugleich die allgemeine Richtigkeit der Reihen bewiesen ist, wird sich in § 85 zeigen.*)

*) Es liesse sich dies auf ganz elementare Weise, jedoch weitläufiger, auch schon hier zeigen. Quadrirt man z. B. beide Reihen, so ist die Summe ihrer Quadrate für jeden Werth von x immer $= 1$ &c.

Siebentes Buch.

Gebrauch der sogenannten imaginären Grössen und der sich daraus ergebenden Consequenzen. Zurückführung jeder imaginären Function auf die einfache Form: $\alpha + \beta i$.

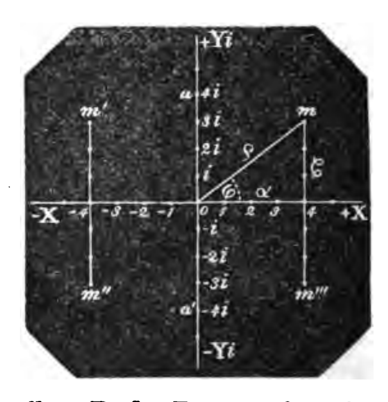
81.

Schon in der Algebra haben sich im Laufe der Rechnung manchmal die sogenannten imaginären (richtiger lateralen) Grössen eingestellt, und wir haben schon dort darauf aufmerksam gemacht, dass diese Grössen in der höhern Mathematik eine sehr wichtige Rolle spielen, indem man vermittelst derselben, gleichnissweise, aber noch viel mehr, wie in der Trigonometrie vermittelst eines Hülfswinkels, über oftmals entgegentretende grosse Hindernisse wegsetzen und damit auf wichtige Entdeckungen kommen kann. Wir haben schon dort gezeigt, dass man mit diesen Grössen nach den gewöhnlichen Regeln der Algebra eben so gut rechnen kann, wie mit den sogenannten reellen Grössen. (Algebra §§ 325 und 326.) Hier wird es nun zum weitern Fortkommen nothwendig, diese Sache wieder aufzunehmen. Was übrigens die eigentliche Metaphysik, so wie die reelle Bedeutung der sogenannten imaginären Grössen, welche zuerst Gauss in ein helles Licht gesetzt hat, betrifft, so müssen wir den Leser, um hier den ebenen Gang nicht zu unterbrechen, auf den Anhang § 176 verweisen.

82.

Wir bezeichnen wieder mit Gauss das Symbol*) $\sqrt{-1}$ Kürze halber mit i. Um eine bestimmte Vorstellung mit dieser Grösse i zu verbinden, wollen wir sie als Einheit einer neuen Zahlenreihe betrachten, welche, wenn auch für Krämer zu subtil, doch für die Wissenschaft unentbehrlich ist.

Alle vier Arten Zahlen, nämlich sowohl die sogenannten positiven und negativen reellen, als die sogenannten positiven und negativen imaginären, so wie auch die aus reellen und imaginären Zahlen zusammengesetzten (complexe) Grössen, können wir nun, wie Gauss gezeigt, folgendermassen bildlich darstellen, gleichsam versinnlichen.



Man denke sich in einer unbegrenzten Ebene zwei auf einander senkrechte Linien $-\overline{xx}$ und $-\overline{y_i y_i}$ und trage dann vom Durchschnittspunct 0 aus die positiven reellen Zahlen auf $\overline{0x}$, die negativen nach entgegengesetzter Richtung, dann seitwärts (lateral) die positiven imaginären Zahlen auf $\overline{0y_i}$ und die negativen wieder nach entgegengesetzter Richtung ab. So stellt z. B. der Punct a (nämlich die Linie $0\,a$) die Zahl $4\,i$ dar, und in dem Punct a^1 findet man die Zahl $-4\,i$, die Zahl $2\frac{1}{2}$ fällt in die Mitte zwischen 2 und 3, die Zahl $\sqrt{5}$ fällt ebenfalls zwischen 2 und 3, die Zahl $-\sqrt{2}\,.\,i$ liegt zwischen $-i$ und $-2\,i$ &c. Um die complexen Grössen bildlich darzustellen, betrachte man die reelle Grösse als Abscisse und den reellen Factor von i als Ordinate. So stellen z. B. die beiden Linien $\overline{04}$ und $\overline{4m}$ die complexe Grösse

*) Die Zeichen 1, 2, 3... — 1, — 2... sind ebensowohl nur Rechnungssymbole, wie die Zeichen i, $2i$, $3i$,... — i, — $2i$.

$4 + 3i$ dar. In dem Punct m' findet man die Grösse $-4 + 3i$, in m'' die Grösse $-4 - 3i$, in m''' die Grösse $4 - 3i$.

83.

Da die Zahlenebene unbegrenzt ist, und ihre Puncte stetig auf einander folgen, so giebt es keine reelle, imaginäre, oder complexe Grösse, welche sich nicht auf die eben gezeigte Weise darstellen liesse.*) Dasselbe kann aber auch durch Polarcoordinaten geschehen. Ist allgemein $\alpha + \beta i$ eine beliebige complexe Grösse, so ist α die Abscisse und β die Ordinate des Puncts in der Ebene, welche diese Grösse darstellt. Ferner ist der sogenannte Modulus ϱ dieser complexen Grösse, welcher nichts anderes, als der Radius vector des erwähnten Punctes ist, durch die Gleichung $\varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, und der Winkel φ, den dieser immer absolut (positiv) zu nehmende Modulus ϱ mit der Achse $\overline{0x}$ macht, durch die Gleichung $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\beta}{\alpha}$ gegeben. Ferner hat man noch:

$$\alpha = \varrho \cos \varphi$$
$$\beta = \varrho \sin \varphi$$

Deshalb kann man auch immer setzen:

$$\alpha + \beta i = \varrho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

84.

Aus der Algebra (§ 325) ist bekannt, dass:

$i = \sqrt{-1}$	$i^{4n+1} = \sqrt{-1} = i$
$i^2 = -1$ **)	$i^{4n+2} = -1$
$i^3 = -\sqrt{-1} = -i$	$i^{4n+3} = -\sqrt{-1} = -i$
$i^4 = 1$	$i^{4n+4} = 1$

*) Die unbegrenzte Zahlenlinie hat sich also, als nothwendige Folge unserer Denkgesetze, zu einer unbegrenzten Zahlenebene ausgedehnt. Man kommt deshalb leicht auf den Gedanken, ob es nicht auch in unsern Denkgesetzen liegen und die Nothwendigkeit eintreten könnte, die Zahlenebene sich in einen Zahlenraum ausdehnen zu lassen. Gauss ist jedoch nicht dieser Meinung. (S. Anhang § 176 am Ende.)

**) Dass $(\pm\sqrt{-})^2$, wie in der Algebra (§ 325) aus der Lehre von

Dies vorausgeschickt, gelangen wir nun durch Vermittelung der Grösse i, indem wir dieselbe, sie gleichsam als eine Hülfsgrösse betrachtend, mit den sogenannten reellen Grössen verbinden und, wie in der Algebra gezeigt, den einfachen Regeln der Arithmetik consequent unterwerfen, zu sehr fruchtbaren Resultaten, welche wir ohne Benutzung dieser Grösse i theils gar nicht, theils nur auf sehr grossen Umwegen erhalten könnten.

85.

Setzen wir in der Exponentialreihe:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \quad (\S\ 73,\ 7)$$

$i\,x$ statt x, so erhalten wir:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2 x^2}{1.2} + \frac{i^3 x^3}{1.2.3} + \frac{i^4 x^4}{1.2.3.4} + \frac{i^5 x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

oder:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + - \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - + \ldots\right)$$

Die Zahl x kann nun immer durch einen mit der Einheit beschriebenen und in Theilen derselben ausgedrückten Kreisbogen dargestellt werden (indem man nöthigenfalls, wenn die Grösse x es erfordert, die ganze Peripherie beliebig oft durchlaufen kann). Da nun aber, wie gleich gezeigt werden soll, die Summe der ersten in Klammern stehenden convergenten Reihe (für ein noch so grosses x) gleich dem Cosinus, und die der andern Reihe gleich dem Sinus dieses Bogens ist, so kann man, die trigonometrischen Tabellen vorausgesetzt, im Fall es auf wirkliche Summirung der beiden Reihen ankäme, obigen Ausdruck viel kürzer so schreiben:

---

den Potenzen gefolgert, $= -1$ ist, folgt auch, wenn man eine mittlere Proportionale, x, zwischen $+1$ und -1 sucht. Es folgt nämlich aus: $1 : x = x : -1$, dass $x^2 = -1$, also $x = \pm\sqrt{-1}$. Da nun das Product der beiden innern Glieder gleich dem der äussern ist, so ist nothwendig $(+\sqrt{-1})^2 = -1$. (S. Note zu § 177.)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \ldots\ldots\ldots\ldots (1)^{*)}$$

Setzen wir hierin $- i$ statt $+ i$, so ist:

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Um zu zeigen, dass die beiden erwähnten Reihen alle Eigenschaften der trigonometrischen Functionen $\cos x$ und $\sin x$ besitzen, mithin auch für jedes x gültig sind, und statt ihrer die Functionen $\cos x$ und $\sin x$ gesetzt und aus den fertigen trigonometrischen Tafeln entnommen werden dürfen, multiplicire man die beiden Gleichungen (1) und (2) mit einander, so kommt erstlich:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = e^{ix}\, e^{-ix} = e^0 = 1$$

d. h. die Summe der Quadrate der beiden Reihen ist für jedes $\pm x$ immer $= 1$.

Multiplicirt man die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{\pm iy} &= \cos y \pm i \sin y \end{aligned}$$

mit einander, so kommt:

$$e^{i(x \pm y)} = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y + i (\sin x \cos y \pm \cos x \sin y)$$

Nun ist aber auch, $x \pm y$ als einen Bogen gedacht:

$$e^{i(x \pm y)} = \cos (x \pm y) + i \sin (x \pm y).$$

Beide für $e^{i(x \pm y)}$ erhaltenen complexen Grössen müssen einander gleich sein. Sollen aber zwei complexe Grössen einander gleich sein, mithin ihre bildliche Darstellung auf einen und denselben Punct in der Zahlen-Ebene führen (§ 82), so müssen nothwendig die reellen und die imaginären Theile einzeln einander gleich sein, daher die bekannten Beziehungen:

---

*) Setzt man in dieser Formel $x = \frac{\pi}{2}$, so ist $e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$. Also auch $(e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}})^{\sqrt{-1}} = (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$. Mithin: $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\pi}}$

Diesen merkwürdigen Ausdruck hatte schon Euler gefunden.

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos x \mp \cos x \sin y$$

Anmerkung. Die Moduli der beiden complexen Grössen (1) und (2) sind $\varrho = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$. Der Punct in der unbegrenzten Ebene, dessen Lage durch die (complexen) Grössen e^{ix} und e^{-ix}, nämlich $\cos x \pm i \sin x$, bestimmt ist, liegt also immer (wie gross auch x sein möge) auf der mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Peripherie.

86.

Durch Addition und Subtraction der beiden vorstehenden Gleichungen (1) und (2) ergeben sich für $\cos x$ und $\sin x$ die nur scheinbar imaginären Ausdrücke:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

87.

Die Division der beiden Gleichungen (1) und (2) § 85 giebt:

$$e^{2ix} = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x} = \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}$$

Beiderseits die natürlichen Logarithmen genommen und $l\left(\frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}\right)$ nach Formel 3, § 77, entwickelt, indem man dort $i \operatorname{tg} x$ statt x setzt, kommt (weil alle graden Potenzen von i reell):

$$2ix = 2\left(i \operatorname{tg} x + \frac{i^3 \operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{i^5 \operatorname{tg}^5 x}{5} + \ldots\ldots\right)$$

$$2ix = 2i\left(\operatorname{tg} x + \frac{i^2 \operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{i^4 \operatorname{tg}^5 x}{5} + \ldots\ldots\right)$$

$$x = \operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \ldots\ldots\ldots (1)$$

Diese Reihe ist convergent für alle Werthe von tg x, die nicht grösser als 1 sind. Man kann also darnach Bögen berechnen, deren Tangenten gegeben, und sie deshalb, wie Leibnitz zuerst gezeigt hat, zur Berechnung der Zahl π (Kreisverhältniss) benutzen. Der mit der Einheit beschriebene Bogen, (45°) dessen Tangente = 1 ist, ist offenbar $\frac{\pi}{4}$. Setzt man also in obige Reihe tg $x = 1$, so muss man $\frac{\pi}{4}$ statt x setzen, und man hat dann:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \ldots\ldots$$

Diese Leibnitz'sche Reihe ist zwar convergirend, jedoch so ausserordentlich langsam, dass man an tausend Glieder zusammenrechnen müsste, um die Zahl π nur so genau zu erhalten, als Metius sie schon hatte. Es lässt sich jedoch durch einen kleinen Kunstgriff eine convergentere Reihe daraus ableiten.

Euler betrachtete nämlich den halben Quadranten $\frac{\pi}{4}$ als Summe zweier anderer Bögen α und β, deren Tangenten also echte Brüche sind, für welche vorige Reihe stärker convergirt. Nimmt man nun α so, dass tg $\alpha = \frac{1}{2}$, so wird, weil $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ und also:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\text{oder: } \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta} = 1$$

$$\text{woraus: } \operatorname{tg}\beta = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3}.$$

Da also die Summe zweier Bögen α und β, deren Tangenten beziehlich $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ sind, $= \frac{\pi}{4}$ ist, so setze man in die Reihe (1) einmal $\frac{1}{2}$ und einmal $\frac{1}{3}$ statt tg x und addire beide Resultate, so hat man:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}\right)-+\ldots$$

Nach dieser Euler'schen Reihe liesse sich die Zahl π schon ohne viele Mühe berechnen. Um jedoch eine noch stärker convergirende Reihe zu erhalten, dachte sich Machin einen Bogen u, dessen Tangente $=\frac{1}{5}$ ist, dann folgt aus $\operatorname{tg} u=\frac{1}{5}$, dass (Trig. § 100, 19) $\operatorname{tg} 2u=\frac{5}{12}$ und $\operatorname{tg} 4u=\frac{120}{119}$. Es ist also $4u>\frac{\pi}{4}$.

Setzen wir nun $4u-\frac{\pi}{4}=v$, so ist:

$$\operatorname{tg} v=\operatorname{tg}\left(4u-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239}.$$

Mithin muss man, weil $\frac{\pi}{4}=4u-v$, in die Reihe (1) $\frac{1}{5}$ statt $\operatorname{tg} x$ setzen und den Betrag 4 mal nehmen, so hat man den Bogen $4u$, setzt man dann noch $\frac{1}{239}$ statt $\operatorname{tg} x$, so erhält man den Bogen v. Daher:

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\frac{1}{7.5^7}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-\ldots\right)$$

88.

Setzen wir in $e^{\pm ix}=\cos x\pm i\sin x$ (§ 85) nx statt x, so ist:

$$e^{\pm inx}=\cos nx\pm i\sin nx$$

da nun aber auch $e^{\pm inx}=(e^{\pm ix})^n=(\cos x\pm\sin x)^n$, so hat man die folgende höchst merkwürdige und für die Folge sehr wichtige Formel, welche, wie Laplace glaubt, zuerst von Moivre gefunden worden, und auch dessen Namen geführt, nämlich:

$$(\cos x\pm i\sin x)^n=\cos nx\pm i\sin nx$$

gültig für jeden Werth von n.

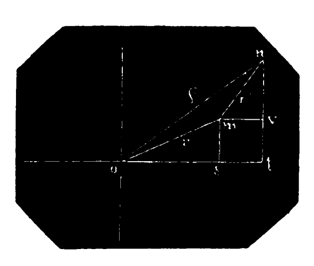
Ferner folgt noch leicht, dass $\left(\text{weil } e^{-ix}=\frac{1}{e^{ix}}\right)$:

$$\frac{1}{\cos x\pm i\sin x}=\cos x\mp i\sin x$$

$$\frac{1}{(\cos x \pm i \sin x)^n} = (\cos x \mp i \sin x)^n = \cos nx \mp i \sin nx$$

Die nachfolgenden Beispiele werden zeigen, wie man ausser $e^{\pm ix}$ und $(\cos x \pm i \sin x)^n$ auch jeden andern imaginären Ausdruck auf die einfache Form $\alpha + \beta i$ zurückführen kann, wo aber auch α oder $\beta = 0$ sein kann.*)

89 a.



Hat man zwei complexe Grössen $a+bi$ und $a'+b'i$ zu addiren, so ist die Summe offenbar $=(a+a')+(b+b').i$. Diese Addition lässt sich auch graphisch bewirken. Stellt nämlich der Punct m in der Zahlenebene die Grösse $a+bi$ dar, so dass also $os=a$ und $ms=b$ ist, und man trägt nun, vom Puncte m ausgehend, noch die Grösse $a'+b'i$ auf, so dass $mv=st=a'$ und $nv=b'$ ist, so stellt der Punct n die Summe beider dar. Die Linie $om=r$ stellt den Modulus der ersten, $mn=r'$ den der zweiten complexen Grösse und $on=\varrho$ den Modulus ihrer Summe dar, nämlich $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $r'=\sqrt{a'^2+b'^2}$ und $\varrho=\sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2}$. Hierbei fällt auf, dass der Modulus von der Summe zweier complexen Grössen, $a+bi$ und $a'+b'i$, entweder unter oder doch höchstens nur gleich der Summe beider Moduli ist. In Zeichen:

$$\sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2} \leqq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a'^2+b'^2}.$$

Bilden die beiden Moduli r, r' eine grade Linie, dann wäre $\varrho=r+r'$.

Zusatz 1. Es folgt hieraus, dass auch der Modulus von der Summe beliebig vieler complexen Grössen entweder unter oder doch höchstens nur gleich der Summe aller Moduli ist,

*) Ueber die geometrische Construction der imaginären Grössen siehe Anhang § 177.

indem man von zwei auf drei, von drei auf vier complexe Grössen schliesst &c.

Zusatz 2. Dass sich auch die Subtraction einer complexen Grösse von einer andern graphisch bewirken und dadurch auch die Ausführung dieser Operation sich versinnlichen lässt, ist für sich klar.

89 b.

Aufgabe. Den Ausdruck $(a+bi).(c+di)$ auf die einfachere Form $\alpha+\beta i$ zu reduciren.

Auflösung. Durch unmittelbare Multiplication erhält man:

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc).i.$$

Bei dieser Reduction fällt auf, dass der Modulus des Products aus zwei (oder auch beliebig vielen) complexen Factoren gleich ist dem Product aus den Moduln der einzelnen Factoren. Denn:

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)\,^{*)}$$

mithin: $\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}$

90.

Aufgabe. Den Ausdruck $\frac{a+bi}{c+di}$ auf die Form $x+\beta i$ zu reduciren.

Auflösung. Man multiplicire Zähler und Nenner mit $c-di$, so erhält man:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.i$$

---

*) Nebenbei bemerkt ist also das Product zweier Zahlen, wovon jede die Summe zweier Quadrate ist, immer gleich der Summe zweier Quadrate; z. B. $(1^2+2^2)(3^2+4^2)=(1.3-2.4)^2+(1.4+2.3)^2$, d. i. $5.25=5^2+10^2$.

Hierbei fällt auf, dass der Modulus des Quotienten zweier imaginären Grössen gleich ist dem Quotienten aus ihren Moduln. Denn:

$$\frac{(ac+bd)^2}{(c^2+d^2)^2}+\frac{(bc-ad)^2}{(c^2+d^2)^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} \text{ \&c.}$$

91.

Aufgabe. Den Ausdruck $(x+yi)^n$ auf die Form $\alpha+\beta i$ zu reduciren.

Auflösung. Man könnte hier den binomischen Lehrsatz anwenden, wenn, für den Fall, dass n ein Bruch oder negativ wäre, die Reihen für die reelle Grösse α und für den Factor β convergirten. Bequemer ist aber jedenfalls, hier die Moivre'-sche Formel anzuwenden. Setzen wir nämlich nach § 83 $x\pm yi=\varrho\,(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)$, so ist:

$$(x\pm yi)^n=\varrho^n(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)^n=\varrho^n\cos n\varphi\pm\varrho^n\sin n\varphi\,.\,i$$

worin $\varrho=\sqrt{x^2+y^2}$ und $\left(\text{weil } \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}\right)$; $\varphi=\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$, mithin auch, wenn man will, so geschrieben:

$$(x\pm yi)^n=(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}\cos\left(n\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right)\pm(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}\sin\left(n\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right).\,i$$

92.

Aufgabe. Den Ausdruck $l(x+yi)$ zu reduciren.

Auflösung. Es ist $(x+yi)=x\left(1+\frac{y}{x}i\right)$. Daher:

$$l(x+yi)=lx+l\left(1+\frac{y}{x}i\right)$$

mithin (§ 76 [3]):

$$l(x+yi)=lx+\frac{y}{x}i-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2.i^2+\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3.i^3-\frac{1}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^4.i^4+\frac{1}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^5.i^5-\ldots$$

$$l(x+yi)=lx+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^4+\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^6-\frac{1}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^8+-\ldots\right]$$

$$+i\left[\frac{y}{x}-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{y}{x}\right)^7+-\ldots\right]$$

$$l(x+yi)=lx+\frac{1}{2}l\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)+i\,\mathrm{Arctg}\frac{y}{x}$$

$$l(x+yi)=l\sqrt{x^2+y^2}+i\,\mathrm{Arctg}\frac{y}{x}\,{}^{*)}$$

93.

Aufgabe. Den Ausdruck $e^{x\pm yi}$ zu reduciren.

Auflösung. Es ist:

$$e^{x\pm yi}=e^x.e^{\pm yi}=e^x.(\cos y\pm i\sin y)=e^x\cos y\pm e^x\sin y.i$$

94.

Aufgabe. Die Ausdrücke $\sin(xi)$ und $\cos(xi)$ zu reduciren.

Auflösung. Setzt man in den Formeln § 86 xi statt x, so hat man:

$$\sin(xi)=\frac{e^{-x}-e^x}{2i}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.i \text{ (hier ist } \alpha=0)$$

$$\cos(xi)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots \text{(hier ist } \beta=0)$$

---

*) $\frac{1}{2}l\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=\frac{1}{2}l\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)=l\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{x}=l\sqrt{x^2+y^2}-lx.$

Aufgabe. In Cauchy's Calcul différentiel findet sich auch die Aufgabe: Die Ausdrücke $\sin(y+xi)$ und $\cos(y+xi)$ zu reduciren.

Auflösung. Es ist:

$$\sin(y+xi) = \sin y . \cos(xi) + \cos y \sin(xi)$$

$$\sin(y+xi) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} . \sin y + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cos y . i \quad \ldots . (1)$$

$$\cos(y+xi) = \cos y . \cos(xi) - \sin y . \sin(xi)$$

$$\cos(y+xi) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} . \cos y - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sin y . i \quad \ldots . (2)$$

96.

Vermittelst der Moivre'schen Formel ist es nun leicht, die Potenzen von $\sin x$, $\cos x$ durch dieselben trigonometrischen Functionen vom Vielfachen des Bogens oder Winkels x auszudrücken.

Setzen wir, Kürze halber:

$$\cos x + i \sin x = u$$
$$\cos x - i \sin x = v$$

so ist: $u + v = 2 . \cos x \qquad u\ v = 1$
$\qquad u - v = 2i \sin x \qquad u^m v^m = 1$

und weil (§ 88): $(\cos x + i \sin x)^m = \cos mx + i \sin mx = u^m$
$\qquad (\cos x - i \sin x)^m = \cos mx - i \sin mx = v^m$

so ist auch: $u^m + v^m = 2 \cos mx$
$\qquad u^m - v^m = 2i \sin mx.$

Dies vorausgeschickt, hat man nun aus der Gleichung $2 \cos x = u + v$ oder $2^m \cos^m x = (u + v)^m$, wenn man das Binom entwickelt, indem hier der Exponent m eine ganze positive Zahl bedeutet:

$$2^m \cos^m x = u^m + mu^{m-1}.v + \frac{m.m-1}{1.2} u^{m-2}.v^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} u^{m-3}.v^3 + \ldots\ldots + muv^{m-1} + v^m$$

$$2^m \cos^m x = u^m + m.u^{m-2}.uv + \frac{m.m-1}{1.2}.u^{m-4}.u^2v^2 + \ldots + m,uv.v^{m-2} + v^m$$

$$2^m \cos^m x = (u^m + v^m) + m(u^{m-2} + v^{m-2}) + \frac{m.m-1}{1.2}(u^{m-4} + v^{m-4}) + \ldots$$

$$2^m \cos^m x = 2.\cos mx + m.2\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{1.2}.2\cos(m-4)x + \ldots$$

Da die Coefficienten der Binomialreihe, die von Anfang und Ende gleich weit abstehen, gleich sind, und (wie nöthigenfalls durch ein bestimmtes Beispiel klar wird)*) für eine grade Anzahl Glieder (also m ungrade) jeder der beiden mittlern mit u und v multiplicirten Coefficienten $= \dfrac{m.m-1.m-2\ldots\left(\frac{m+1}{2}+1\right)}{1\;.\;2\;.\;3\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}$ und für eine ungrade Anzahl Glieder (also m grade) das mittlere

$$\text{Glied} = \frac{m.m-1\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1\;.\;2\ldots\ldots\frac{m}{2}}.u^{\frac{m}{2}}.v^{\frac{m}{2}} = 2.\tfrac{1}{2}.\frac{m.m-1\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1\;.\;2\ldots\ldots\frac{m}{2}}$$

ist, so hat man:

1) wenn m grade:

$$2^{m-1}\cos^m x = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{1.2}\cos(m-4)x + \ldots + \tfrac{1}{2}.\frac{m.m-1\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{m}{2}}$$

2) wenn m ungrade:

---

*) $2^5\cos^5 x = u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5$

$2^5\cos^5 x = (u^5 + v^5) + 5.(u^3 + v^3) + \frac{5.4}{1.2}(u + v)$

$2^5\cos^5 x = 2.\cos 5x + 5.2\cos 3x + \frac{5.4}{1.2}.2\cos x$

$$2^{m-1}\cos^m x = \cos mx + \frac{m}{1}.\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{1.2}\cos(m-4)x + .. + \frac{m.m-1..\left(\frac{m+1}{2}+1\right)}{1.2....\frac{m-1}{2}}.\cos x$$

Die andere Gleichung $2i\sin x = u - v$, oder $2^m i^m \sin^m x = (u-v)^m$ giebt:

$$2^m i^m \sin^m x = u^m - mu^{m-1}v + \frac{m.m-1}{1\;.\;2}u^{m-2}v^2 - + \ldots \pm v^m$$

$$2^m i^m \sin^m x = u^m - mu^{m-2} + \frac{m.m-1}{1\;.\;2}u^{m-4} - + \ldots \pm v^m.$$

Da die Vorzeichen regelmässig abwechseln, und das letzte Glied für m grade positiv und für m ungrade negativ ist, so hat man $\left(\text{weil } i^m = (i^2)^{\frac{m}{2}} = (-1)^{\frac{m}{2}}\right)$:

1) für m grade:

$$(-1)^{\frac{m}{2}}.2^{m-1}\sin^m x = \cos mx - \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{1\;.\;2}\cos(m-4)x - .. \pm \tfrac{1}{2}.\frac{m.m-1..\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2....\frac{m}{2}}$$

2) für m ungrade:*)

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}.2^{m-1}\sin^m x = \sin mx - \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m.m-1}{1\;.\;2}\sin(m-4)x - .. \pm \frac{m.m-1.\left(\frac{m+1}{2}+1\right)}{1\;.\;2.....\frac{m-1}{2}}.\sin x$$

97 a.

Da vorstehende vier Formeln für die Integralrechnung wichtig sind, so wollen wir hier gleich einige specielle Fälle zum vorkommenden Gebrauch und zum Nachschlagen daraus ableiten. Setzt man $m = 2, 3, 4, \ldots$, so erhält man:

*) Für m ungrade ist nämlich das letzte Glied negativ, und da dann allgemein $u^m - v^m = 2i\sin mx$; $u^{m-2} - v_{m-2} = 2.i\sin(m-2)x$ &c., so bleibt in jedem Gliede der Factor i, und indem man auf beiden Seiten durch i dividirt, kommt auf der linken Seite der Factor $i^{m-1} = (i^2)^{\frac{m-1}{2}} = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$.

$$2\cos^2 x = \cos 2x + 1$$
$$4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x$$
$$8\cos^4 x = \cos 4x + 4\cos 2x + 3$$
$$16\cos^5 x = \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x$$
$$32\cos^6 x = \cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10$$
$$64\cos^7 x = \cos 7x + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x$$
$$\vdots$$

$$2\sin^2 x = -\cos 2x + 1$$
$$4\sin^3 x = -\sin 3x + 3\sin x$$
$$8\sin^4 x = \cos 4x - 4\cos 2x + 3$$
$$16\sin^5 x = \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x$$
$$32\sin^6 x = -\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10$$
$$64\sin^7 x = -\sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x$$
$$\vdots$$

97b.

Vermittelst der beiden § 96 gefundenen Gleichungen, nämlich:

$$\cos mx + i\sin mx = (\cos x + i\sin x)^m$$
$$\cos mx - i\sin mx = (\cos x - i\sin x)^m$$

erhält man auch leicht Formeln, nach welchen man umgekehrt die sinus und cosinus vom Vielfachen eines Bogens oder Winkels durch Potenzen dieser trigonometrischen Functionen vom einfachen Bogen oder Winkel ausdrücken kann. Man hat nämlich zuerst:

$$2\cos mx = (\cos x + i\sin x)^m + (\cos x - i\sin x)^m$$
$$2i\sin mx = (\cos x + i\sin x)^m - (\cos x - i\sin x)^m$$

Betrachten wir hier nur den Fall, wo m eine ganze Zahl ist, und entwickeln die rechten Seiten nach der Binomialformel, indem man auf die sich tilgenden Glieder und gemeinschaftlichen Factoren achtet, so verschwindet alles scheinbar Imaginäre und man erhält folgende beide endliche Reihen, deren einfaches Bildungsgesetz in die Augen springt:

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m.m-1}{1\,.\,2}\cos^{m-2}x.\sin^2 x$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cos^{m-4}x\sin^4 x - + \ldots$$

$$\sin mx = \frac{m}{1}\cos^{m-1}x.\sin x - \frac{m.m-1.m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\cos^{m-3}x.\sin^3 x$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\cos^{m-5}x.\sin^5 x - + \ldots$$

Hiernach ist z. B. für $m = 2, 3, 4, \ldots$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x.\sin^2 x$$
$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x.\sin^2 x + \sin^4 x$$
$$\vdots$$

$$\sin 2x = 2\cos x.\sin x$$
$$\sin 3x = 3\cos^2 x.\sin x - \sin^3 x$$
$$\sin 4x = 4\cos^3 x.\sin x - 4.\cos x.\sin^3 x$$
$$\vdots$$

Zusatz. Aus dem Anblick der allgemeinen Formeln ergiebt sich die Möglichkeit, dass man, wenn m grade, $\cos mx$ auch durch lauter Potenzen von $\sin x$ (oder $\cos x$) und, wenn m ungrade, $\sin mx$ durch Potenzen von $\sin x$ ausdrücken könnte. Setzt man nämlich $1 - \sin^2 x$ statt $\cos^2 x$, so hat man z. B.:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = -1 + 2\cos^2 x$$
$$\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x + 8\sin^4 x = 1 - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x$$
$$\cos 6x = 1 - 18\sin^2 x + 48\sin^4 x - 32\sin^6 x$$
$$\vdots$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$
$$\sin 5x = 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x$$
$$\vdots$$

Achtes Buch.

Von den algebraischen Gleichungen.

1. Hülfssätze.

98.

Hat man irgend eine ganze Function von x, z. B.:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + Mx + N,$$

wo also die Exponenten $n, n-1, \dots$ ganze positive Zahlen, die Coefficienten A, B, C... bis M aber ganz beliebige positive, negative, ganze oder gebrochene Zahlen, 0 nicht ausgenommen, sind, N aber nicht 0 und von x befreit ist, so ist klar, dass für jeden endlichen positiven oder negativen reellen Werth von x auch der Betrag der ganzen Function einen endlichen reellen Werth giebt, weil nämlich jedes Glied, also auch die Summe aller, einen reellen Werth giebt. Denkt man sich ferner einen für x angenommenen reellen Werth (x_0) durch ein proportionirtes Stück auf einer Abscissenlinie abgesteckt und den zugehörigen Betrag der ganzen Function durch eine entsprechende Ordinate dargestellt, so ist auch klar, dass, wenn die Werthe von x, die Abscissen, stetig auf einander folgen, auch die entsprechenden Beträge der Function, die Ordinaten, also auch ihre Endpuncte stetig auf einander folgen und eine einzige stetige Linie bilden. Wegen dieser Eigenschaft ist also eine ganze Function von x nothwendig immer eine stetige (continuirliche).

99.

Die erwähnte Linie, welche aus einer solchen Function hervorgehen würde, kann den Umständen nach ganz oberhalb der Abscissenlinie oder auch zu beiden Seiten liegen, mithin dieselbe ein- oder auch mehreremal schneiden.

Die aus $x^2 - 2x + 5$ entspringende Linie z. B. bleibt in ihrer unendlichen Ausdehnung nach rechts und links stets oberhalb der Abscissenlinie, weil es keinen reellen Werth von x giebt, für welchen die Function $x^2 - 2x + 5$ gleich Null wird, denn setzen wir $x^2 - 2x + 5 = 0$, so folgt daraus $x = 1 \pm 2\sqrt{-1}$; diese complexen Werthe von x lassen sich aber nicht durch eine Abscisse darstellen, obgleich der Betrag der Function für diese complexen Werthe $= 0$ wird. Die aus der Function $x^2 - x - 6$ entspringende Linie hingegen schneidet die Abscissenlinie zweimal und liegt also zu beiden Seiten derselben. Denn setzen wir $x^2 - x - 6 = 0$, so folgt daraus: $x = \frac{1 \pm 5}{2}$ &c.

100.

Aus dem vorstehenden § folgt nun, dass, wenn eine ganze Function:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N$$

für zwei reelle Werthe von x (x_0 und x_1) Resultate von entgegengesetzten Vorzeichen giebt, d. h. eine positive und eine negative Ordinate, es dann nothwendig auch (wenigstens) einen reellen Werth von x geben muss, für welchen die Function $= 0$ wird. Denn die stetige Linie, welche die Function, wirklich construirt, geben, und welche durch die Endpuncte der positiven und negativen Ordinaten gehen würde, liegt theils oberhalb, theils unterhalb der Abscissenlinie und muss dieselbe also wenigstens einmal schneiden.

101.

Lehrsatz. In jeder ganzen Function:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N$$

kann man statt x immer einen so grossen Werth setzen, dass das höchste Glied (x^n) grösser wird, als die Summe aller folgenden.

1. **Beweis.** Diese Function lässt sich so schreiben:

$$x^n\left(1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\ldots+\frac{M}{x^{n-1}}+\frac{N}{x^n}\right)$$

Nun kann man aber x so gross werden lassen, dass die auf 1 folgenden Brüche: $\frac{A}{x}, \frac{B}{x^2} \ldots \frac{N}{x^n}$ so klein werden, dass ihre Summe kleiner als 1 wird; alsdann ist aber offenbar auch:

$$x^n > Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N.$$

2. **Beweis.** Legt man in $x^n+Ax^{n-1}+\ldots+Mx+N$ allen Coefficienten A, B,...N den Werth des grössten, den wir mit G bezeichnen wollen, bei, so kann man für x einen solchen Werth angeben, dass, selbst alle Vorzeichen als gleich angenommen, doch noch:

$x^n > G(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)$ oder: (Algebra § 254)

$$x^n > G.\frac{x^n-1}{x-1} \text{ oder:}$$

$$x^n > \frac{G.x^n}{x-1}-\frac{G}{x-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

und dies offenbar um so mehr, wenn:

$$x^n > G.\frac{x^n}{x-1} \text{ oder:}$$

$$x-1 > G, \text{ also: } x > G+1.$$

Setzt man diesen Werth von x in (1), so kommt auf der linken Seite mehr, als auf der rechten.

102.

Lehrsatz. In jeder ganzen Function von der Form:
$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}-Dx^{n-4}-Ex^{n-5}-\ldots-Mx-N,$

in welcher nämlich ein oder mehrere unmittelbar auf einander folgende Anfangsglieder alle positiv, die darauf folgenden aber alle negativ sind, giebt es unter den unzähligen positiven Werthen, welche für x gesetzt werden können, nur einen einzigen, für welchen die Function $= 0$ wird.

Beweis. Für $x=0$ giebt die Function ein negatives Resultat $(-\mathrm{N})$. Lassen wir nun x von 0 an im positiven Sinne immerfort wachsen, so wird zuletzt x^n allein schon grösser, als die Summe aller folgenden (§ 101), mithin muss x vorher schon einen solchen positiven Werth gehabt haben, für welchen die Function $= 0$ wurde (§ 100). Von da an aber bleibt bei wachsendem positiven x die Function immer positiv. Es giebt also nur einen positiven Werth von x, für welchen obige Function $= 0$ wird.

103.

Lehrsatz. Wenn es in der ganzen Function:

$$x^n + \mathrm{A}x^{n-1} + \mathrm{B}x^{n-2} + \ldots + \mathrm{M}x + \mathrm{N}$$

für die unbestimmte Grösse x irgend einen Werth a giebt (er möge direct, invers, lateral oder complex sein), welcher die Function zu Null macht, so ist die Function nothwendig durch $x - a$ ohne Rest theilbar.

Nehmen wir des leichtern Verständnisses halber erst einen speciellen Fall.

Die Function $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$ z. B. wird $= 0$, wenn man $+3$ statt x setzt; dass sie nun wirklich durch $x-3$ ohne Rest theilbar ist, zeigt zuerst die wirklich ausgeführte Division, indem (Algebra § 321):

$$\frac{x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24}{x - 3} = x^3 - x^2 - 10x - 8.$$

Die Function $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 26$ wird für $x = 3$ nicht $= 0$ und deshalb muss auch bei der Division derselben durch $x - 3$ ein Rest bleiben. Es ist nämlich:

$$\frac{x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 26}{x - 3} = x^3 - x^2 - 10x - 8 + \frac{2}{x - 3}$$

1. Beweis. Sei allgemein:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N \ldots\ldots\ldots (1)$$

eine beliebige ganze Function und a der Werth, welcher, statt x gesetzt, dieselbe zu Null macht, so dass also:

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + Ma + N = 0,$$

so wird offenbar, wenn man, wie in vorstehendem Zahlenbeispiel, mit $x - a$ in $x^n + Ax^{n-1} + \ldots + Mx + N$ dividirt, der Quotient mit x^{n-1} anheben. Bezeichnen wir die Coefficienten des Quotienten mit A_1, $B_1 \ldots$, so hat man:

$$\frac{x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N}{x - a} = x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + B_1 x^{n-3} + \ldots + M_1 x + N_1 + \frac{R}{x - a}$$

Dass nun aber der hier fingirte und jedenfalls von x befreite Rest R nicht existirt oder $R = 0$ ist, folgt, wenn man auf beiden Seiten mit $x - a$ multiplicirt. Dann ist:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N = (x - a)\left\{x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \ldots + M_1 x + N_1\right\} + R$$

Da nun beide Seiten dieser Gleichung für jeden Werth von x gleiche Resultate geben müssen, zufolge der Voraussetzung aber für $x = a$ die linke Seite $= 0$, und rechter Hand der Factor $x - a$, also auch das Product aus ihm und dem andern eingeklammerten Factor $= 0$ wird, so hat man, a statt x gesetzt:

$$0 = 0 + R, \text{ mithin: } R = 0$$

Dieser Beweis ist von d'Alembert, der folgende von Lagrange.

2. Beweis. Aus der Voraussetzung:

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + Ma + N = 0$$

folgt: $N = -a^n - Aa^{n-1} - Ba^{n-2} - \ldots - Ma.$

Setzt man diesen Ausdruck für N in die Function (1), so wird sie:

$$x^n + Ax^{n-1} + \ldots + Mx - a^n - Aa^{n-1} - \ldots - Ma$$

oder: $x^n - a^n + A(x^{n-1} - a^{n-1}) + B(x^{n-2} - a^{n-2}) + \ldots + M(x - a),$

und es ist aus dieser Form nun klar, dass die fragliche Function (1), was auch a sein möge, durch $x-a$ ohne Rest theilbar ist. (Algebra § 321, 2.)

104.

Bildet man durch gewöhnliche Multiplication aus einfachen zweitheiligen Factoren (Formen ersten Grades) ein Product, so ist klar, dass das Product durch jeden der Factoren ohne Rest theilber sein muss. Es ist z. B.:

$$(x-1)\,(x-3)\,(x+2)=x^3-2x^2-5x+6\,.....(1)$$

und das Product rechter Hand muss durch $x-1$, durch $x-3$ und durch $x+2$ ohne Rest theilbar sein.

Weil ferner, wenn man in der Gleichung (1) für x beliebige Werthe setzt, auf beiden Seiten gleiche Resultate kommen müssen, linker Hand aber jedesmal einer der Factoren $=0$ wird, wenn man statt x die Zahlen 1, 3 und -2 setzt, so muss für jeden dieser drei Werthe von x auch das Product rechter Hand $=0$ werden, und es ist klar, dass für jeden andern Werth von x keiner der drei Factoren, also auch nicht das Product, $=0$ wird.

105.

Aus Formen ersten Grades, $x-a$, $x-b$, $x-c$ &c., lässt sich durch gemeine Multiplication oder durch Variation das entsprechende Product entwickeln, und es ist einleuchtend, dass, wenn man n einfache Factoren, $x-a$, $x-b$ &c. hat, das Product eine ganze Function vom $n$ten Grade sein wird; wichtiger ist nun aber die umgekehrte Frage: ob man wohl jede ganze Function vom $n$ten Grade als ein aus Formen ersten Grades gebildetes Product betrachten darf und in solche zerlegen kann. Die Beantwortung dieser Frage hängt von der Theorie der höhern algebraischen Gleichungen ab.

106.

Schon in der Algebra (§ 218) ist erklärt, dass in einer Gleichung mit nur einer unbekannten Grösse jede statt der

unbekannten gesetzte positive, negative, laterale oder complexe Grösse, welche der Gleichung Genüge leistet, eine Wurzel derselben genannt wird. Kommen in einer Gleichung nur ganze positive Potenzen der unbekannten Grösse vor und ist n der höchste Exponent, so heisst sie eine algebraische Gleichung vom $n$ten Grade und lässt sich, wenn man alle Glieder auf die linke Seite bringt, immer so formen:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N = 0,$$

so dass nämlich die linke Seite immer eine ganze Function ist.

Sind alle Potenzen der unbekannten Grösse von der $n$ten bis zur 1ten darin enthalten, so heisst die Gleichung vollständig, sonst unvollständig.

107.

Die vorhin aufgeworfene Frage, ob sich jede ganze Function vom $n$ten Grade, oder, was dasselbe ist, die linke Seite einer geordneten algebraischen Gleichung $n$ten Grades von obiger Form immer in n einfache Factoren auflösen lässt, kommt darauf zurück, ob es für jede algebraische Gleichung immer einen Werth a giebt, welcher, statt der unbestimmten Grösse x gesetzt, derselben Genüge leistet; denn wäre dies der Fall, so könnte man, wie in § 103 bewiesen, die linke Seite $x^n + Ax^{n-1} + \ldots + Mx + N$ durch $x - a$ ohne Rest dividiren und mithin dieselbe in zwei Factoren auflösen, wovon der eine einfach $(x-a)$ und der andere der Quotient:

$$x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \ldots + M_1 x + N_1$$

wäre. Von dem erhaltenen, um einen Grad niedrigern Quotienten gälte dann dasselbe wieder. Denn wäre b die Grösse, welche, statt x gesetzt, den Quotienten zu Null macht, so könnte man ihn wieder durch $x - b$ ohne Rest dividiren und mithin in das Product $(x-b)(x^{n-2} + A_2 x^{n-3} + \ldots + M_2 x + N_2)$ auflösen &c.

Liesse sich also beweisen, dass für jede (geordnete) algebraische Gleichung immer ein Werth existirt, welcher, statt der

unbekannten x gesetzt, derselben Genüge leistet, so wäre man auch zu dem Schlusse berechtigt, jede Gleichung vom $n$ten Grade als ein Product aus n einfachen Factoren betrachten zu dürfen.

Diese n einfachen Factoren könnten dann, den Umständen nach, zum Theil oder auch alle reelle, imaginäre oder complexe Grössen, zum Theil oder auch alle verschieden oder auch gleich sein; im letztern Falle sagt man, die Gleichung habe n gleiche Wurzeln.

So hat z B. die Gleichung dritten Grades $x^3-2x^2-5x+6=0$ drei reelle Wurzeln, zwei positive, 1 und 3, und eine negative, -2, denn sie ist das Product aus $(x-1)(x-3)(x+2)$, und die drei Werthe 1, -2, 3 leisten ihr Genüge.

Die Gleichung $x^3-3x^2+4=0$ hat drei reelle Wurzeln, worunter zwei gleiche. Sie ist das Product aus $(x-2)(x-2)(x+1)$.

Die Gleichung: $x^2-2x+5=0$ hat zwei complexe Wurzeln, so ist das Product aus $(x-1+2\sqrt{-1})(x-1-2\sqrt{-1})$.

108.

*Dass nun aber jede algebraische Gleichung $n$ten Grades wirklich eine und folglich n Wurzeln habe (sich in n Factoren ersten Grades zerlegen lässt), dafür giebt es verschiedene Beweise, von welchen wir hier den einfachsten Ullherr'schen (im Crelle'schen Journal) erläutern wollen. Dieser Beweis zeigt nämlich, dass es für jede ganze, in Bezug auf x rationale Function:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N \ldots\ldots\ldots (1)$$

immer einen Werth $p+qi$ giebt, welcher statt x gesetzt die Function (1) annullirt.*)

Was auch p und q für Werthe haben mögen (Null nicht ausgenommen), so können wir doch, zufolge § 83, immer $p=\varrho \,.\cos\varphi$ und $q=\varrho\,.\sin\varphi$, mithin $p+qi\,\varrho(\cos=\varphi+i\sin\varphi)$ setzen.

*) Wir nehmen hier die Coefficienten A, B, ... N alle als reelle Grössen an, weil dies vermöge § 112, Beweis 2, genügt. Vermöge §§ 113 und 114 brauchte dieser Beweis nur für den speciellen Fall geführt zu werden, wo n eine grade Zahl und N positiv ist.



Substituiren wir nun diesen bequemern Ausdruck statt x in (1), so verwandelt sich die Function in:

$$\varrho^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + \left\{\begin{array}{c} A\varrho^{n-1}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n-1} \\ B\varrho^{n-2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n-2} \\ \vdots \\ M\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{array}\right\} + N$$

mithin auch, zufolge der Moivre'schen Formel (§ 88), in:

$$\varrho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + \left\{\begin{array}{c} A\varrho^{n-1}[\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi] \\ B\varrho^{n-2}[\cos(n-2)\varphi + i\sin(n-2)\varphi] \\ \vdots \\ M\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{array}\right\} + N \ldots (2)$$

Um nun anschaulich zu machen, dass es für ϱ und φ Werthe geben muss, welche den Ausdruck (2) annulliren, wollen wir denselben, wie in § 82 gezeigt, bildlich darstellen, indem wir ϱ und φ als veränderlich annehmen. Aus der unbegrenzten Zahlenebene, in welcher wir die fraglichen Werthe von x, nämlich $p+qi$ oder $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ zu suchen haben, können wir nun ein endliches begrenztes Stück ausscheiden, über welches hinaus sich ϱ^n jedenfalls nicht erstrecken kann, indem wir nämlich für ϱ^n zuerst einen so grossen Werth annehmen, dass:

$$\varrho^n > A\varrho^{n-1} + B\varrho^{n-2} + \ldots + M\varrho + N \ldots\ldots (3)$$

was nach § 101 immer möglich ist.

Beschreiben wir nun mit $\varrho^n = OA$ einen Kreis um den Nullpunct O, so muss die erste complexe Grösse in (2), nämlich: $\varrho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, für sich allein dargestellt, für jeden Werth von φ, Puncte der Zahlenebene geben, welche alle auf die Peripherie dieses Kreises fallen, weil ja der Modulus dieser complexen Grösse für jedes φ immer $= \varrho^n$ ist, nämlich: $\sqrt{(\varrho^{2n}\cos^2 n\varphi + \varrho^{2n}\sin^2 n\varphi)} = \varrho^n$ (§ 85, Anmerkung).

Denken wir uns für φ alle stetig auf einander folgenden Werthe von 0^0 bis $\frac{360^0}{n}$ gesetzt, so ist zuerst:

Für $\varphi = 0$, der Betrag der ersten complexen Grösse in (2),

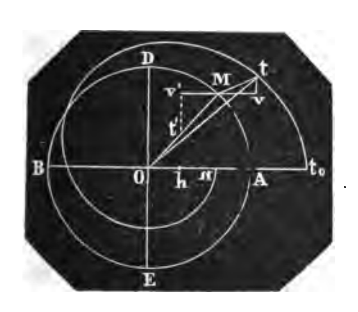
$= \varrho^n$ (Punct A). Bezeichnen wir die Summe aller folgenden Glieder mit $\alpha + \beta i$, indem wir Kürze halber:

$$A\varrho^{n-1}.\cos(n-1)\varphi + B\varrho^{n-2}.\cos(n-2)\varphi + \ldots + M\varrho\cos\varphi + N = \alpha \,..(4)$$

$$A\varrho^{n-1}.\sin(n-1)\varphi + B\varrho^{n-2}.\sin(n-2)\varphi + \ldots + M\varrho\sin\varphi = \beta \ldots\ldots(5)$$

setzen, so ist für $\varphi = 0$, der ganze Betrag der Function (2), $= \varrho^n + \alpha$ (indem nach (5) für $\varphi = 0$ auch $\beta = 0$). Weil nun $\varrho^n > \alpha$,*) so ist auch, selbst wenn α negativ wäre, $\varrho^n + \alpha > 0$. Der Punct t_0 der Zahlenebene, welcher, für $\varphi = 0$, den ganzen Betrag der Function (2) darstellt, fällt nothwendig r e c h t s von DE und zwar zwischen O und A, wenn α negativ, und über A hinaus, wenn, wie in der Figur angenommen, α $(= At_0)$ positiv ist.

Für $\varphi = \frac{90}{n}$, also $n\varphi = 90^0 = \widehat{DOA}$, ist in (2) der Betrag des ersten complexen Gliedes $= \varrho^n.i$ (Punct D) und, indem wir die Summe aller folgenden Glieder für diesen Werth von φ wieder mit $\alpha + \beta i$ bezeichnen und, wie in § 89 a gezeigt, dem ersten Gliede hinzufügen, ist der ganze Betrag der Function (2) $= \alpha + (\varrho^n + \beta)\, i$, mithin, wenn β auch negativ wäre, doch $\varrho^n + \beta > 0$ und der fragliche Punct der Zahlenebene fällt nothwendig o b e r h a l b des Durchmessers AB (und, je nachdem α positiv oder negativ ist, rechts oder links von DE).



Für $\varphi = \frac{180}{n}$, also $n\varphi = 180^0$, ist der Betrag des ersten complexen Gliedes $= \varrho^n \cos 180 = -\varrho^n$ (Punct B) und, indem wir die Summe der folgenden Glieder wieder mit $\alpha + \beta i$ bezeichnen, der ganze Betrag der Function (2)

---

*) Wenn man Glieder rechter Hand in der Ungleichheit (3) mit den cosinus oder sinus beliebiger Winkel multiplicirt, so muss die Ungleichheit bestehen bleiben, weil ja alle cosinus und sinus echte Brüche oder höchstens = 1 sind.

$=(-\varrho^n+\alpha)+\beta i$. Der ihn darstellende Punct der Zahlenebene fällt nun links von DE, weil die reelle Grösse $(-\varrho^n+\alpha)$, wegen $\varrho^n > \alpha$, jedenfalls negativ ist.

Für $\varphi=\frac{270}{n}$, also $n\varphi=270$ ist $i\varrho^n \sin 270^0 = -\varrho^n . i$. Der fragliche Punct fällt unterhalb AB, weil jetzt der Factor von i, nämlich: $-\varrho^n+\beta$ (wegen $\varrho^n > \beta$), negativ ist.

Für $\varphi=\frac{360}{n}$, also $n\varphi=360^0$ ist der ganze Betrag der Function (2) $=(\varrho^n+\alpha)+\beta i$. Der fragliche Punct fällt jetzt wieder rechts von DE (und, je nachdem β positiv oder negativ ist, oberhalb oder unterhalb AB).

Es ist nun einleuchtend, dass für die Annahme eines so grossen Werthes von ϱ, für welchen die Ungleichheit (3) besteht, für keinen Werth von φ der fragliche Punct t mit dem Nullpunct 0 zusammenfallen kann, weil der Modulus des ersten complexen Gliedes stets grösser ist, als der Modulus von der Summe aller folgenden Glieder ($\varrho^n > \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, § 89 a, Zusatz).*)

Die in (4) und (5) durch α und β vertretenen Ausdrücke ändern sich stetig mit dem Winkel φ, so dass, wenn φ sich um eine sehr kleine Grösse ändert, sich nothwendig α und β auch nur um sehr kleine Grössen ändern. Deshalb müssen die erwähnten Puncte $t_0, t_1, \ldots$ stetig auf einander folgen und in einer gewissen krummen Linie den Nullpunct umschlingen.**)

---

*) Wenn auch für irgend einen Punct M, welcher den Betrag des ersten complexen Gliedes in (2) darstellt, α und β, statt positiv, wie hier in der Figur angenommen, ($Mv=\alpha$, $vt=\beta$) beide negativ (Mv', $v't'$) und so beschaffen wären, dass der Modulus $t'M=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ grade auf den Modulus $OM=\varrho^n$ fiele, so würde der Punct t' doch den Nullpunct 0 nicht erreichen, weil $\varrho > \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

**) Wollte man φ noch weiter wachsen lassen, z. B. von $\frac{360}{n}$ bis $\frac{2.360}{n}$, also $n\varphi$ von 360^0 bis 2.360^0, so erhält man noch eine Windung, und für $\varphi=0$ bis $\varphi=360^0$, also von $n\varphi=0$ bis $n\varphi=n.360$ im Ganzen n Windungen, die aus angegebenem Grunde ($\varrho^n > \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$) alle um den

Lassen wir nun ϱ stetig bis zu Null abnehmen, und denken uns für jeden Modulus von $\varrho^n = OA$ bis $\varrho^n = 0$ die Construction des ganzen Ausdrucks (2) ausgeführt, so wird offenbar die ganze Kreisfläche ADBE mit concentrischen, sich stetig an einander legenden Peripherien ganz ausgefüllt. Gleichzeitig müssen auch die diesen unzähligen Peripherien entsprechenden Windungen sich stetig an einander legen. Und diese Windungen, die anfangs den Nullpunct O umschlangen, müssen für sehr kleine ϱ ganz ausserhalb desselben liegen. Denn setzt man $\varrho = 0$, so reducirt sich der ganze Ausdruck (2) auf das letzte constante Glied N, und dies giebt, construirt, einen Punct h, der ausserhalb des Nullpuncts O auf AB fällt, und zwar rechts oder links von DE, je nachdem N positiv oder negativ ist.

Nun kann man sich aber ϱ, also auch den Modulus ϱ^n, so klein denken, dass in (2) die constante Grösse N grösser bleibt, als die Summe aller vorhergehenden reellen Glieder. Die diesem ϱ^n entsprechende kleine Windung (indem man für φ wieder alle Werthe von 0 bis $\frac{360}{n}$ gesetzt denkt) wird jetzt nicht den Nullpunct O, sondern den für $\varrho = 0$ entsprechenden Punct h umschlingen. Es muss also nothwendig zwischen $\varrho^n = OA$ und $\varrho^n = 0$ ein solcher Modulus ϱ_1^n existiren, für welchen die Windung den Nullpunct weder umschlingt, noch ganz ausserhalb desselben liegt, sondern durch denselben hindurchgeht. Ueberdies ist auch klar, dass alle Puncte des von der ersten Windung $t_0\,tn$ und der graden Linie nt_0 begrenzten Stücks der Zahlenebene, mithin auch der Nullpunct O zum Vorschein kommen müssen, und hiermit ist nun bewiesen, dass es für ϱ und φ solche Werthe giebt, welche den Ausdruck (2) zu Null machen, folglich auch, weil wir $\varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ statt $p + qi$ substituirt haben,

---

Nullpunct O herumgehen. Die in der Figur nur angedeutete Eine Windung entspricht der bekannten Function:

$$81\,(\cos 4\,\varphi + i\,\sin 4\,\varphi) + 54\,(\cos 2\,\varphi + i\sin 2\,\varphi) + 5,$$

welche aus der Gleichung: $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$ entspringt, wenn man darin $x = \varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und dann $\varrho = 3$ setzt.

dass für x wenigstens Ein Werth von der Form $p+qi$ (wo jedoch p oder q auch $=0$ sein kann) existirt, welcher die Function (1) annullirt, mit andern Worten: jede rationale algebraische Gleichung $n$ten Grades hat eine Wurzel und mithin n Wurzeln (§ 107).

109.

Ueber die nicht leichte Theorie der höhern Gleichungen haben sich die Mathematiker von je her sehr viel den Kopf zerbrochen. Je näher man ihr auf die Spur gekommen zu sein glaubt, sagt Montucla, je tiefer verkriecht sie sich. Die Lösung der verwickelten quadratischen Gleichungen erforderte schon einen kleinen Kunstgriff. Mit den höhern Graden aber steigern sich auch die Schwierigkeiten, und obgleich die grössten Analysten sich angestrengt haben, diese sich thürmenden Schwierigkeiten zu überwinden, so ist doch bis jetzt, was die Hauptsache, nämlich die Auflösung der höhern Gleichungen, d. i. die Auffindung ihrer Wurzeln betrifft, das erwünschte Ziel noch nicht erreicht, jedoch sind mehrere schon an sich merkwürdige Sätze aufgefunden worden, welche vielleicht dazu beitragen können, an dies Ziel zu gelangen. Die wichtigsten dieser Sätze, zu welchen die vorhergehenden die Grundlage bilden, wollen wir im Folgenden mittheilen.

2. Eigenschaften.

110.

Bildet man aus n einfachen Factoren $x-a_1, x-a_2 \ldots x-a_n$, das Product $x^n + Ax^{n-1} + \ldots + Mx + N$, so sind die Coefficienten A, B...N des Products im Voraus durch die Grössen $a_1, a_2 \ldots$ bestimmt. Mit andern Worten: die Coefficienten in einer algebraischen Gleichung sind Functionen von den Wurzeln. Es sollen nun diese Functionen, d. h. die Beziehungen, welche unter den Coefficienten einer Gleichung und ihren Wurzeln stattfinden, gefunden werden.

Man denke sich zu dem Ende die n einfachen Factoren, wie angedeutet, unter einander gestellt, die Zeiger 1, 2 eingeführt, und das Product nach § 26 durch Variation gebildet, so ist leicht einzusehen, dass, weil der Zeiger 1, an welcher Stelle er auch stehen möge, immer x bedeutet, der Zeiger 2 aber in der letzten Stelle a_1, in der vorletzten a_2 &c. vertritt, und jede Variationsform immer n Factoren enthält, die erste: $1111\ldots111, = x^n$ ist. Die zweite Variationsform ist $1111\ldots112, = a_1 x^{n-1}$. Da nun aber der Zeiger 2 an allen n Stellen zu stehen kommt, so braucht man die ihn enthaltenden Variationsformen nicht alle zu bilden. Man kann dieselben jetzt auf kürzerm Wege erhalten. Die Summe der Coefficienten von x^{n-1} oder der Coefficient A ist offenbar gleich der Summe der Combinationen aus $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$ zur ersten Classe, d. i. gleich der Summe aller Wurzeln, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen. Denn wären z. B., wie hier angenommen, alle Wurzeln positiv, so kommen sie in den einfachen zweitheiligen Factoren $x - a_1$, $x - a_2$ &c. alle mit dem Minuszeichen vor und umgekehrt. Dasselbe gilt offenbar auch, wenn die Wurzeln theils positiv, theils negativ sind. Da ferner aus der Variationsform $1111\ldots122, = a_1\, a_2 x^{n-2}$ alle übrigen, in welchen der Zeiger 2 an zwei Stellen vorkommt, hervorgehen, indem man diese Form permutirt denkt, wodurch offenbar der Zeiger 2 oder die Elemente $a_1\, a_2 \ldots a_n$ in allen möglichen Combinationen zur zweiten Classe zum Vorschein kämen, so ist offenbar die Summe der Coefficienten von x^{n-2}, d. i. der Coefficient B, gleich der Summe der Combinationen aller Wurzeln zur

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ x & - a_n \\ x & - a_{n-1} \\ & \vdots \\ x & - a_4 \\ x & - a_3 \\ x & - a_2 \\ x & - a_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1111\ldots111, = x^n \\ 1111\ldots112, = a_1 x^{n-1} \\ 1111\ldots121, = a_2 x^{n-1} \\ 1111\ldots122, = a_1\, a_2 x^{n-2} \\ 1111\ldots211, = a_3 x^{n-1} \\ 1111\ldots212, = a_1\, a_3 x^{n-2} \\ \quad\vdots \\ 2111\ldots111, = a_n x^{n-1} \\ 2111\ldots112, = a_1\, a_n x^{n-2} \\ 2111\ldots121 \\ 2111\ldots122 \\ \quad\vdots \\ 2222\ldots222, = a_1\, a_2 \ldots a^n \end{array}$$

zweiten Classe, und zwar mit demselben Vorzeichen. Denn welche Vorzeichen die Wurzeln auch haben mögen, so wird das Product aus je zwei, mit denselben oder umgekehrten Vorzeichen, doch dasselbe; z. B. $a_1 \,.\, a_2 = (-a_1)\,(-a_2)$; $a_1 \,.\, (-a_2) = -a_1 \,.\, (a_2)$ &c.

Eben so ist nun wohl einleuchtend, dass die Summe der Coefficienten von x^{n-3}, d. i. C, gleich ist der Summe aller Combinationen der Wurzeln $a_1\, a_2 \ldots a_n$ zur 3ten Classe, aber mit umgekehrten Vorzeichen. Denn wären alle Wurzeln + oder alle —, so würde offenbar das Product aus je drei das umgekehrte Vorzeichen haben Dasselbe gilt auch, wenn die Wurzeln verschiedene Vorzeichen haben. Denn wären z. B. drei Wurzeln $+a, -b, -c$, so wäre das Product $+abc$. Weil aber in den einfachen zweitheiligen Factoren der Gleichung die Vorzeichen der Wurzeln entgegengesetzt sind, $x-a$, $x+b$, $x+c$, so muss sich im Product auch das Vorzeichen von $+abc$ umkehren &c Das letzte Glied N ist demnach das Product aus allen Wurzeln mit demselben oder umgekehrten Vorzeichen, je nachdem dieses letzte Glied ungrade oder grade ist. In Zeichen; es ist in:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Mx + N = 0,$$

wenn $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$ die Wurzeln bedeuten, allemal:

$$A = -(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = -\overset{1}{C}(a_1\, a_2 \ldots a_n)$$

$$B = a_1\, a_2 + a_1\, a_3 + \ldots + a_{n-1}\, a_n = \overset{2}{C}(a_1\, a_2 \ldots a_n)$$

$$C = -(a_1\, a_2\, a_3 + a_1\, a_2\, a_4 + \ldots) = -\overset{3}{C}(a_1\, a_2 \ldots a_n)$$

$$\vdots$$

$$N = \pm(a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots a_n) = \pm\overset{n}{C}(a_1\, a_2 \ldots a_n)$$

111.

Aus vorstehendem § folgt, dass, wenn in einer Gleichung $x^n + Ax^{n-1} + \ldots + Mx + N = 0$ das zweite Glied fehlt, also $A = 0$ ist, dann die Summe aller Wurzeln auch $= 0$ ist. Fehlte das dritte Glied, also $B = 0$, so wäre die Summe der Producte aus je zwei der Wurzeln $= 0$ &c

Bilden wir z. B. aus den drei Wurzeln $+1$, $+2$ und -3 die entsprechende Gleichung:

$$(x-1)(x-2)(x+3) = x^3 - 7x + 6 = 0,$$

so fehlt in dieser unvollständigen Gleichung dritten Grades das zweite Glied, weil die Summe der Wurzeln $1+2-3=0$ ist. Die Summe der Producte aus je zwei mit demselben Vorzeichen genommen ist $1.2 - 1.3 - 2.3 = -7$. Das Product aus allen drei mit umgekehrtem Vorzeichen genommen ist $= -1.2.(-3) = +6$.

112.

Lehrsatz. Wenn eine Gleichung mit reellen Coefficienten:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N = 0$$

eine imaginäre Wurzel von der Form $\alpha + \beta i$ hat, so hat sie nothwendig auch noch eine zweite, die sogenannte conjugirte Wurzel von der Form $\alpha - \beta i$.

1. Beweis. Ist $\alpha + \beta i$ eine Wurzel der Gleichung, so ist $x - \alpha - \beta i$ einer der n einfachen Factoren. Da nun die Coefficienten A, B...N reelle Grössen sein sollen, so muss sich unter den n einfachen Factoren der Gleichung nothwendig noch ein zweiter Factor von der Form $x - \alpha + \beta i$ befinden; denn nur der Factor $x - \alpha + \beta i$ giebt, mit $x - \alpha - \beta i$ multiplicirt, ein reelles Product. Es ist nämlich:

$$(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) = (x - \alpha)^2 + \beta^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

2. Beweis. Ist $\alpha + \beta i$ eine Wurzel der Gleichung, so kommt, wenn man diese Grösse statt x substituirt, ein Resultat von der Form $T + Ui$, und es ist klar, dass alle graden Potenzen von βi, weil reell, in T, und alle ungraden Potenzen von βi in Ui enthalten sind. Setzt man $\alpha - \beta i$ statt x, so muss, weil die graden Potenzen von $-\beta i$ dieselben wie von $+\beta i$, die ungraden Potenzen von $+\beta i$ und $-\beta i$ aber entgegengesetzt sind, offenbar das Resultat der Substitution $= T - Ui$ sein, mithin, wenn $\alpha + \beta i$ eine Wurzel, als $T = 0$, $U = 0$ ist, so ist auch $\alpha - \beta i$ eine Wurzel.

Wenn also eine Gleichung mit reellen Coefficienten imaginäre Wurzeln hat, so sind sie immer gepaart vorhanden.

Hat man also eine solche Wurzel $\alpha+\beta i$ nachgewiesen, so kann man die linke Seite gleich durch $(x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i)=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$ dividiren. In dem entstehenden Quotienten: $x^{n-2}+A_2 x^{n-3}+\ldots+N_2$ sind die Coefficienten wieder reelle Grössen. (Vergl. Randanmerkung § 108.)

113.

Lehrsatz. Eine Gleichung von unpaarem Grade hat wenigstens eine reelle Wurzel, und zwar eine positive oder negative, je nachdem das letzte Glied negativ oder positiv ist.

Beweis. Man denke sich die linke Seite construirt. Setzt man $x=0$, so giebt das letzte Glied N die Ordinate. Nun kann man für x einen so grossen Werth $\pm a$ gesetzt denken, dass das erste Glied grösser wird, als die Summe aller folgenden, und das entgegengesetzte Vorzeichen von N hat &c. (§ 100). So hat z. B. die Gleichung:

$$x^5+3x^2+2x+7=0$$

wenigstens eine reelle (negative) Wurzel. Denn setzt man $x=0$, so ist der Betrag der linken Seite $=+7$, und setzt man x nur $=-2$, so ist der Betrag der linken Seite $=-17$ &c. (§ 100).

114.

Lehrsatz. Eine Gleichung von paarem Grade, deren letztes Glied negativ ist, hat wenigstens zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative.

Beweis. Sei die Gleichung:

$$x^{2m}+Ax^{2m-1}+\ldots+Mx-N=0.$$

Denkt man sich die linke Seite construirt und setzt $x=0$, so erhält man eine negative Ordinate, $-N$. Setzt man hierauf für

x eine hinreichend grosse positive und auch negative Zahl $\pm a$, so wird $(\pm a)^{2m}$ positiv und grösser als die Summe aller folgenden Glieder, wenn auch alle negativ wären. Man hat also rechts und links der negativen Ordinate — N noch eine positive Ordinate, und die Linie, welche durch aller drei Endpuncte geht, muss die Abscissenlinie wenigstens zweimal schneiden. (§ 100.)

115.

Lehrsatz. Ist eine Gleichung von paarem Grade und ihr letztes Glied positiv, so können alle ihre Wurzeln imaginär sein.

Beweis. Aus § 112 1stem Beweis folgt, dass, wenn alle Wurzeln einer Gleichung imaginär, folglich auch gepaart sind, das letzte Glied, nämlich das Product, aus den gepaarten imaginären Wurzeln immer positiv ist. (§ 110.)

116.

Lehrsatz. Wenn die Wurzeln einer Gleichung alle reell und ganze Zahlen sind, so sind die Coefficienten der Gleichung nothwendig auch ganze Zahlen, und die Wurzeln sind in diesem seltenen Falle leicht zu finden, indem man das letzte Glied in Factoren zerlegt, dann diese Factoren, sowohl positiv als negativ genommen, statt x substituirt und zusieht, welche von ihnen der Gleichung Genüge leisten.

Beweis. Dies folgt aus der Bildung der Gleichung § 110, wornach das letzte Glied = dem Product aus allen Wurzeln ist.

117.

Lehrsatz. Sind in einer Gleichung alle Coefficienten ganze Zahlen, so sind die etwaigen reellen Wurzeln, wenn sie keine ganze Zahlen sind, nothwendig irrational.

Beweis. Angenommen: es sei ein echter oder unechter Bruch $\frac{a}{b}$ eine Wurzel der Gleichung:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N = 0,$$

mithin: $$\frac{a^n}{b^n} + A\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + B\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} + \ldots + M\frac{a}{b} + N = 0.$$

Dass nun aber diese letzte Gleichung nicht möglich ist, leuchtet ein, wenn man mit b^{n-1} multiplicirt; dann hätte man:

$$\frac{a^n}{b} + Aa^{n-1} + Ba^{n-2}b + \ldots + Mab^{n-2} + Nb^{n-1} = 0.$$

Da nun das erste Glied $\frac{a^n}{b}$ keine ganze Zahl sein kann (Algebra § 316), alle darauf folgenden aber nach der Voraussetzung ganze Zahlen sind, so ist klar, dass der Betrag aller Glieder nicht $= 0$ sein kann.

Die Gleichung $x^5 - 10x^2 - 10x - 6 = 0$ z. B. hat eine Wurzel $x = \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{4}$. Die Gleichung $x^6 - 6x^4 - 28x^3 - 18x^2 + 12x - 2 = 0$ hat eine Wurzel $x = \sqrt[6]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$.

118.

Den vorhergehenden §§ fügen wir noch folgende sich von selbst verstehende Sätze ohne Beweis hinzu:

1) Wenn alle Glieder einer Gleichung das + Zeichen haben, so hat eine solche Gleichung keine positive Wurzeln (§ 110).

2) Wenn alle Wurzeln einer Gleichung reell und negativ sind, so ist die Gleichung nothwendig vollständig, und alle Glieder sind positiv.

3) Wenn eine Gleichung lauter grade Potenzen der unbekannten Grösse enthält, so sind die Wurzeln paarweise gleich, aber entgegengesetzt. Denn wenn $+a$ der Gleichung Genüge leistet, so muss auch, der graden Potenzen halber, $-a$ derselben Genüge leisten.

3. Umformung der Gleichungen.

119.

Um aus einer Gleichung:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N = 0 \ldots\ldots (1)$$

eine andere abzuleiten, deren Wurzeln sämmtlich um eine bestimmte Grösse, h, grösser sind, setze man $y-h$ statt x, so erhält man die neue Gleichung:

$$(y-h)^n + A(y-h)^{n-1} + B(y-h)^{n-2} + \ldots + M(y-h) + N = 0 \ldots (2)$$

und es ist klar, dass, wenn irgend ein Werth a, statt x gesetzt, der Gleichung (1) Genüge leistet, dann der Werth $a+h$, statt y gesetzt, der Gleichung (2) Genüge leistet.

Umgekehrt werden alle Wurzeln der Gleichung (1) um die beliebige Grösse h kleiner, wenn man $y+h$ statt x substituirt.

Beispiel. Die Wurzeln der Gleichung:

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

sollen alle um 1 verkleinert werden.

Setzt man $y+1$ statt x, so hat man:

$$(y+1)^3 - 2(y+1)^2 - 9(y+1) + 18 = 0,$$

oder entwickelt:

$$y^3 + y^2 - 10y + 8 = 0 \ldots\ldots\ldots (4)$$

Die Gleichung (3) hat die Wurzeln 2, 3, − 3; die Gleichung (4) aber die Wurzeln 1, 2, − 4.

120.

Vorstehender Satz kann benutzt werden, um aus einer Gleichung eine andere abzuleiten, in welcher das zweite Glied fehlt. Soll z. B. aus der Gleichung:

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

eine andere abgeleitet werden, in welcher das zweite Glied fehlt, so setze man vorläufig $y+h$ statt x, entwickele und ordne, so kommt:

$$y^3 + (3h-2) \cdot y^2 + (3h^2 - 4h - 9) \cdot y + (h^3 - 2h^2 - 9h + 18) = 0 \ldots (2)$$

Damit nun das zweite Glied, $(3h-2)y^2$, herausfällt, nehme man h so, dass $3h-2=0$, mithin $h=\frac{2}{3}$, so erhält man die Gleichung:

$$y^3-\frac{31}{3}y+\frac{308}{27}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

In dieser vom zweiten Gliede befreiten Gleichung (3) sind die Wurzeln um $\frac{2}{3}$ kleiner, als in der Gleichung (1).

Allgemein, um aus der Gleichung:

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N=0$$

eine andere abzuleiten, in welcher das zweite Glied fehlt, muss man $y-\frac{A}{n}$ statt x substituiren. Denn setzt man $y+h$ statt x, so hat man:

$$(y+h)^n+A(y+h)^{n-1}+B(y+h)^{n-2}+\ldots+M(y+h)+N=0,$$

oder entwickelt:

$$y^n+(nh+A).y^{n-1}+\left\{\frac{n.(n-1)}{1\;.\;2}h^2+(n-1)h.A+B\right\}.y^{n-2}+\ldots\ldots=0.$$

Damit das zweite Glied herausfällt, muss $nh+A=0$, mithin $h=-\frac{A}{n}$ sein. Wollte man das dritte Glied fortschaffen, so hätte man, um h zu bestimmen, eine quadratische, und um das vierte Glied fortzuschaffen, eine cubische Gleichung zu lösen &c.

121.

Um aus einer Gleichung:

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N=0$$

eine andere abzuleiten, deren Wurzeln h mal grösser oder kleiner sind, setze man in ersterem Falle $\frac{y}{h}$ und im andern Falle hy statt x. Diese Umformung könnte benutzt werden, wenn mehrere Wurzeln sehr nahe gleich sind, indem man

durch hinreichende Vervielfachung der Wurzeln dieselben weiter aus einander bringen kann, so wie auch, um aus einer Gleichung, deren Coefficienten Brüche sind, eine andere abzuleiten, deren Coefficienten ganze Zahlen sind. Man braucht zu diesem letztern Zwecke nur sämmtliche Wurzeln der ersten Gleichung mit dem allgemeinen Nenner zu multipliciren. Soll z. B. aus der Gleichung:

$$x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{6} = 0 \ldots\ldots (1)$$

eine andere abgeleitet werden, in welcher die Coefficienten ganze Zahlen sind, so substituire man $\frac{y}{12}$ statt x, so kommt:

$$\frac{y^5}{12^5} - \frac{2}{3}\cdot\frac{y^4}{12^4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{y^2}{12^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{12} + \frac{5}{6} = 0,$$

oder: $y^5 - 8y^4 + 432y^2 - 10368y + 207360 = 0.$

In dieser Gleichung mit ganzen Coefficienten sind alle Wurzeln 12mal grösser, als die der Gleichung (1).

122.

Um aus einer Gleichung eine andere mit grade entgegengesetzten Wurzeln abzuleiten, setze man $-x$ satt x. Die Gleichung:

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$$

hat die drei Wurzeln 2, 3, -3. Die Gleichung:

$$(-x)^3 - 2(-x)^2 - 9(-x) + 18 = 0$$

oder: $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

hat die Wurzeln -2, -3, $+3$.

123.

Um aus einer Gleichung eine andere abzuleiten, deren

Wurzeln die reciproken*) Werthe der erstern sind, substituire man $\frac{1}{y}$ statt x. Die Gleichung:

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$$

enthält die Wurzeln 2, 3, — 3. Setzt man $\frac{1}{y}$ statt x, so kommt:

$$\frac{1}{y^3} - 2 \cdot \frac{1}{y^2} - 9 \cdot \frac{1}{y} + 18 = 0$$

$$\text{oder: } 1 - 2y - 9y^2 + 18y^3 = 0$$

$$y^3 - \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{9} y + \frac{1}{18} = 0.$$

Letztere Gleichung hat die drei Wurzeln: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$.

124.

Erklärung. Wenn in einer Gleichung zwei gleiche Vorzeichen unmittelbar auf einander folgen, so nennt man dies eine Folge, und wenn zwei entgegengesetzte Vorzeichen auf einander folgen, eine Abwechselung der Vorzeichen. So hat z. B. die Gleichung:

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$$

zwei Abwechselungen + —, — +, und eine Folge — —.

Es ist klar, dass in einer vollständigen Gleichung vom $n$ten Grade die Summe der Folgen und Abwechselungen $= n$ ist.

125.

Lehrsatz. Eine Gleichung (vollständig oder unvollständig) kann nicht mehr positive Wurzeln haben, als Abwechselungen

---

*) Wenn der Werth einer Wurzel $= a$ ist, so heisst $\frac{1}{a}$ der reciproke Werth derselben.

Beweis. Nehmen wir folgende (vollständige oder unvollständige) Gleichung von beliebigen Vorzeichen:

$$x^n + \ldots - Mx^p - \ldots + Nx^q + \ldots \mp \pm Px^r \pm \ldots \pm T = 0 \ldots\ldots (1)$$

die nach den Exponenten, so wie sie von n an kleiner sind, geordnet ist, so können wir annehmen, dass die beiden ersten Glieder entweder unmittelbar auf einander folgen oder doch die etwa dazwischen liegenden Glieder alle das $+$ Zeichen haben und mithin bei M die erste Abwechselung stattfindet. Bei N finde eben so die zweite Abwechselung statt. Zwischen N und $\pm$ P mögen beliebig viele Abwechselungen fallen, bei P aber die letzte, d. h. Px^r ist entweder das letzte Glied (wenn $r = 0$), oder die noch folgenden Glieder haben dasselbe Vorzeichen wie P. Irgendwo muss nothwendig die letzte Abwechselung stattfinden.

Um nun aus dieser Gleichung die nächst höhere zu erhalten, welche die neue positive Wurzel $+ a$ enthält, müssen wir sie mit $x - a$ multipliciren Die Multiplication mit x lässt alle Vorzeichen unverändert, die Multiplication mit $- a$ aber kehrt sie alle um, und man erhält:

$$\begin{array}{r|r|r|l}
x^{n+1} + \ldots - M & x^{p+1} - \ldots + N & x^{q+1} + \ldots \mp \pm P & x^{r+1} \pm \ldots \pm Tx \\
- \mu & + \nu & \pm \pi & \mp \ldots \mp \quad \mp Ta \\
\hline
\end{array}$$

$$x^{n+1} + \ldots - M^1 x^{p+1} - \ldots + N^1 x^{q+1} + \ldots \pm P^1 x^{r+1} \ldots\ldots \mp Ta \ldots (2)$$

Weil in Gleichung (1) von x^n bis $-$ Mx^p alle Vorzeichen $+$ sind, so ist klar, dass, wenn die Multiplication mit $- a$ noch ein Glied in x^{p+1} giebt, dies Glied (μx^{p+1}) und mithin auch M^1 nothwendig negativ ist. Aus demselben Grunde ist N^1 positiv, ob in (1) zwischen Mx^p und Nx^q noch ein Glied in x^{q+1} enthalten ist oder nicht, d. h ob ν positiv oder Null ist &c. Man sieht also, dass es in der neuen Gleichung (2) von x^{n+1} bis $\pm$ Px^{r+1} wenigstens eben so viele Abwechselungen giebt, als in der ursprünglichen Gleichung (1) von x^n bis Px^r. Von da an giebt es in der Gleichung (1) keine Abwechselungen mehr, in der neuen Gleichung (2) jedoch wenigstens noch eine Abwechselung von $\pm$ $P^1 x^{r+1}$ bis $\mp$ Ta.

Da nun jede (vollständige oder unvollständige) Gleichung als ein Product aus einfachen zweitheiligen Factoren gedacht werden kann, und jeder einfache Factor, der einer positiven Wurzel entspricht $(x - a)$, wenigstens einen Zeichenwechsel giebt, so ist klar, dass eine jede Gleichung wenigstens so viele Zeichenwechsel als positive Wurzeln hat, oder, was dasselbe ist: eine Gleichung kann jedenfalls nicht mehr positive Wurzeln als Abwechselungen haben. Diesen strengen Beweis hat Gauss zuerst gegeben.

126.

Weil nach § 122 die negativen Wurzeln in positive und umgekehrt verwandelt werden, wenn man $-x$ statt $+x$ setzt, so ergiebt sich noch ein zweiter Lehrsatz, nämlich: eine Gleichung kann nicht mehr negative Wurzeln haben, als die in $-x$ umgeformte Gleichung positive hat.

So kann z. B. die Gleichung:

$$x^7 - 3x^2 + 4x + 6 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

höchstens nur zwei positive und eine negative Wurzel haben, denn die Gleichung hat nur zwei Abwechselungen, und die in $-x$ umgeformte Gleichung, nämlich $x^7 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$, hat nur eine Abwechselung Da nun aber die Anzahl aller Wurzeln $= 7$ ist, so muss die Gleichung wenigstens vier imaginäre Wurzeln haben.

127.

Nach vorstehenden beiden §§ kann man also nicht im Voraus bestimmen, wie viel reelle und wie viel imaginäre Wurzeln eine vorgelegte Gleichung hat, wohl aber, wie viel reelle Wurzeln sie höchstens haben kann, und wenn diese Zahl kleiner ist, als der Grad der Gleichung, wie viel imaginäre Wurzeln sie dann wenigstens haben muss.

128.

Ist eine Gleichung vollständig, und sind alle ihre Wurzeln reell, so hat sie offenbar just so viel positive Wurzeln,

als Abwechselungen, und so viel negative, als Folgen der Zeichen, weil die Summe der Folgen und Abwechselungen einer vollständigen Gleichung mit dem Grade derselben übereinstimmt.

129.

Wir haben nun in dem Vorhergehenden die wichtigsten Sätze über die algebraischen Gleichungen mitgetheilt, welche möglicherweise zur Entdeckung einer bequemen Auflösungsmethode behülflich sein könnten, die, wie schon in § 109 bemerkt, bis jetzt noch nicht gefunden ist. Die höchst langweiligen und mühsamen Methoden, welche man in den Lehrbüchern angegeben findet, beruhen alle auf einem Tappen. Nur zwei in neuerer Zeit angegebene verdienen erwähnt zu werden. Erstens die Gräfe'sche, welche den von der Berliner Academie darauf gesetzten Preis erhielt. Man findet diese von Encke verbesserte Methode in dem Berliner astronomischen Jahrbuch von 1841. Diese Methode ist aber so unerträglich weitläufig und beschwerlich, dass selbst ein so ausserordentlich schneller Rechner wie Encke dennoch volle drei Stunden gebraucht, um darnach nur eine Gleichung vom siebenten Grade aufzulösen, d. h. alle ihre reellen sowohl als imaginären Wurzeln zu finden. Zweitens die Methode von Gauss.*) Diese ist allerdings bedeutend bequemer, passt aber nur für dreigliedrige Gleichungen. Diese beiden Methoden würden zusammen einen Band füllen, und können schon deshalb hier nicht Platz finden.

Bei den Anwendungen der höhern Gleichungen auf wirkliche Fälle des practischen Lebens kommt es jedoch sehr häufig vor, dass man nicht alle Wurzeln, sondern nur eine (und zwar aus andern Gründen oftmals schon halbweg bekannte) positive Wurzel zu bestimmen braucht. In solchen Fällen kann man dann, jedenfalls viel bequemer, auf folgende indirecte Weise verfahren:

Man substituire die näherungsweise bekannte oder gemuthmasste Wurzel. Das Resultat der Substitution wird dann zeigen,

---

*) Gauss Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Göttingen, in der Dieterich'schen Buchhandlung.

ob die Wurzel zu gross oder zu klein ist. Macht man mit der allmälig veränderten Wurzel ein paar Substitutionen mehr, so wird man die Wurzel so genau erhalten, als die practischen Zwecke es erfordern.*)

Weiss man, dass die gesuchte Wurzel > 1 ist, so kann man die Gleichung auch auf die höchste Potenz der Unbekannten reduciren und umgekehrt, wenn die Wurzel < 1 ist.

Sucht man z. B. die positive Wurzel der Gleichung:

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

welche offenbar > 2 (§ 113), so hat man aus $x^3 = 5 + 2x$:

$$x = \sqrt[3]{5 + 2x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Setzt man rechter Hand $x = 2$, so ist $x = \sqrt[3]{9} = 2,08\ldots$; setzt man auf's Neue rechter Hand $x = 2,08$, so ist $x = \sqrt[3]{9,16} = 2,092\ldots$; dann: $x = \sqrt[3]{9,184} = 2,094$. Ferner $x = \sqrt[3]{9,188} = 2,0945$ (bis auf vier Decimalen genau).

Der Taylor'sche Lehrsatz bietet übrigens noch leichtere Mittel dar, und es scheint, als wenn eine vollständige Theorie der höheren Gleichungen die Differentialrechnung nicht ganz umgehen kann.

---

*) Die Regel: dass man zwei Werthe, a und b, suchen soll, welche, statt x gesetzt, entgegengesetzte Resultate geben, zwischen welchen Werthen, a und b, dann die wahre Wurzel zu suchen sein würde (§ 100), ist offenbar falsch, denn die aus der construirten Gleichung entspringende Linie kann ganz oberhalb der Abscissenachse liegen oder auch dieselbe nur berühren, statt zu schneiden. In diesem Falle existiren die erwähnten Werthe a und b gar nicht.

Neuntes Buch.

Auflösung aller zweigliedrigen Gleichungen.

130.

Die zweigliedrigen oder sogenannten reinen höhern Gleichungen lassen sich, wie Gauss zuerst gezeigt hat,*) alle direct und leicht lösen. Wir betrachten diese Gleichungen zuerst in der Form:

$$x^n \pm 1 = 0$$

worauf sie alle gebracht werden können.

131.

Berücksichtigen wir in obiger Form zuerst das untere Zeichen, nämlich:

$$x^n - 1 = 0$$
$$x^n = 1$$

so ist klar, dass diese Gleichung, wenn n grade, zwei reelle Wurzeln, $+1$ und -1, und wenn n ungrade, eine reelle Wurzel, $+1$, hat und nach § 127 nicht mehr reelle Wurzeln haben kann. Die übrigen Wurzeln müssen also imaginär, und wie die Rechnung selbst gleich zeigen wird, alle verschieden sein. Mit andern Worten: es können aus ± 1 so viele verschiedene Wurzeln

*) S. Serret Cours d'algèbre supérieure. Dies Werk handelt fast blos über höhere Gleichungen, setzt aber nicht allein alles Vorhergehende, sondern auch Differential- und Integralrechnung als bekannt voraus.

desselben Grades gezogen werden, als man will. Denn bezeichnen wir nach Cauchy die gewöhnliche arithmetische $n$te Wurzel aus 1 mit $\sqrt[n]{1}$, alle n Wurzeln aus ± 1 aber mit $((\pm 1))^{\frac{1}{n}}$, so ist, weil immer $\cos 2k\pi = 1$ und $\sin 2k\pi = 0$, wenn k irgend eine ganze Zahl ist (Trigonometrie § 59) und zufolge § 88, was auch k und n für ganze Zahlen sein mögen, immer:

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^n = \cos 2k\pi \pm i\sin 2k\pi = 1.$$

Da nun der Ausdruck $\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n}$ auf die $n$te Potenz erhoben $+ 1$ giebt, so muss dieser Ausdruck auch als die $n$te Wurzel aus $+ 1$ betrachtet werden.

Dass nun aber, wenn in diesem Ausdruck für n eine beliebige ganze Zahl und dann für k successive die Zahlen $0, 1, 2 \ldots \frac{1}{2}n$ gesetzt werden, n verschiedene Werthe (Wurzeln) kommen, folgt aus den Lehren der Trigonometrie, wornach die Ausdrücke $\cos\frac{0.\pi}{n} \pm i\sin\frac{0.\pi}{n}$, $\cos\frac{1.\pi}{n} \pm i\sin\frac{1.\pi}{n}$ &c. offenbar verschieden sind. Man findet also alle n Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$, indem man in:

$$x = ((1))^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

für $2k$ successive alle graden Zahlen zwischen 0 und n, oder, was dasselbe ist, $k = 0, 1, 2, 3 \ldots \frac{1}{2}n$ setzt. Man habe z. B. die Gleichung:

$$x^6 - 1 = 0$$

so ist, weil hier $n = 6$:

$$x = ((1))^{\frac{1}{6}} = \cos\frac{2k\pi}{6} \pm i\sin\frac{2k\pi}{6}$$

für $k = 0$ ist: $x = \cos 0\pi \pm i\sin 0\pi = 1$

„ $k = 1$ „ $x = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.i$ *)

*) Es ist nämlich: $\cos\frac{1}{3}\pi = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$ und $\sin\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

für $k=2$ ist: $x=\cos\frac{2}{3}\pi \pm i\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.i$

„ $k=3$ „ $x=\cos\pi \pm i\sin\pi = -1$

Die Gleichung $x^6-1=0$ hat also wirklich sechs verschiedene Wurzeln und es ist:

$$x^6-1=(x-1)(x+1)(x-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)(x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)(x+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)(x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)$$

oder indem man die Factoren, welche zweien gepaarten Wurzeln entsprechen, mit einander multiplicirt, um lauter reelle Grössen zu erhalten, und deshalb die dreigliedrigen (trinomischen) Factoren einführt:

$$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

132.

Man könnte glauben, noch mehrere Wurzeln zu erhalten, wenn man für k Werthe setzt, die über $\frac{1}{2}n$ hinausgehen. Dies ist aber eben nur ein Glaube, den schon § 104 verbietet. Denn, weil $\cos 2\frac{(\frac{1}{2}n+h)}{n}\pi = \cos\left(\pi+\frac{2h}{n}\pi\right) = -\cos\frac{2h}{n}\pi$ und auch $\cos 2\frac{(\frac{1}{2}n-h)}{n}\pi = \cos\left(\pi-\frac{2h}{n}\pi\right) = -\cos\frac{2h}{n}\pi$, so ist immer $\cos 2\frac{(\frac{1}{2}n+h)}{n}\pi = \cos 2\frac{(\frac{1}{2}n-h)}{n}\pi$, d. h. für alle Werthe von k, welche eben so viel über als unter $\frac{1}{2}n$ sind, erhält man dieselben Cosinus wieder, und eben so dieselben Sinus, letztere nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, weil $\sin\left(\pi+\frac{2h}{n}\pi\right) = -\sin\frac{2h}{n}\pi$ und $\sin\left(\pi-\frac{2h}{n}\pi\right) = \sin\frac{2h}{n}\pi$, aus welchem Grunde gleich das doppelte Vorzeichen $\pm$ gesetzt ist. In obigem Beispiel für $x^6-1=0$ ist $\frac{1}{2}n=3$, und es kommt z. B. für $k=3+1=4$ derselbe Cosinus wie für $k=3-1=2$ &c.

Hätte man die Gleichung:

$$x^3-1=0,$$

so ist: $x=(1)^{\frac{1}{3}} = \cos\frac{2k\pi}{3} \pm i\sin\frac{2k\pi}{3}$

für $k=0$ ist: $x=\cos 0=1$
„ $k=1$ „ $x=\cos 120^0 \pm i \sin 120^0$
oder: $x=-\cos 60 \pm i \sin 60=-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.i.$

Mithin ist:

$$x^3-1=(x-1)(x+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)(x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)$$
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

133.

Man kann auch, ohne erst die zweigliedrigen Factoren von x^n-1 zu suchen, gleich die dreigliedrigen berechnen. Aus:

$$x=\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i \sin\frac{2k\pi}{n}$$

folgt nämlich der eine einfache Factor: $x-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}$ und der andere zugehörige: $x-\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$. Multiplicirt man beide mit einander und beachtet, dass $\cos^2\frac{2k\pi}{n}+\sin^2\frac{2k\pi}{n}=1$, so ist der dreigliedrige Factor:

$$x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1;$$

hierin setze man $k=0, 1, 2 \ldots \frac{1}{2}n$. Wird aber der Ausdruck ein vollkommenes Quadrat, was, wenn n grade, für $k=0$ und $k=\frac{1}{2}n$, und wenn n ungrade, für $k=0$ der Fall ist, so muss jedesmal nur die Wurzel genommen werden, indem die einfachen reellen Factoren $x-1$ und $x+1$ nur einmal vorhanden sind. Sei z. B. $n=3$, also die Gleichung $x^3-1=0$, so hat man:

$$x^2-2x.\cos\frac{2k\pi}{3}+1;$$

für $k=0$ kommt: $x^2-2x+1=(x-1)^2$
„ $k=1$ „ $x^2-2x\cos 120^0+1=x^2+x+1,$
daher: $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

Für die Gleichung $x^6 - 1 = 0$ hat man:

$$x^2 - 2x \cos\frac{2k\pi}{6} + 1$$

für $k=0$ kommt: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
„ $k=1$ „ $x^2 - 2x\cos 60^0 + 1 = x^2 - x + 1$
„ $k=2$ „ $x^2 - 2x\cos 120^0 + 1 = x^2 + x + 1$
„ $k=3$ „ $x^2 - 2x\cos\pi + 1 = (x+1)^2$
mithin: $x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

134 a.

Hat man allgemeiner die Gleichung:

$$x^n - a = 0$$

so sind die n einfachen Factoren derselben:*)

$$x - \left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i \sin\frac{2k\pi}{n}\right).\sqrt[n]{a}$$

und die dreigliedrigen:

$$x^2 - 2x.\sqrt[n]{a}.\cos\frac{2k\pi}{n} + (\sqrt[n]{a})^2.$$

134 b.

Um nun auch die n Wurzeln der andern Gleichung:

$$x^n + 1 = 0$$

zu finden, beachte man, dass, wenn k eine beliebige ganze Zahl ist, immer $\cos(2k+1)\pi = -1$, und $\sin(2k+1)\pi = 0$. (Trigonometrie § 59.) Weil ferner:

$$\left(\cos\frac{2k+1}{n}.\pi \pm i \sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)^n = \cos(2k+1)\pi \pm i\sin(2k+1)\pi = -1,$$

so ist nothwendig auch:

*) Aus $x^n = 1\,.\,a$ folgt nämlich: $x = ((1))^{\frac{1}{n}}.\sqrt[n]{a}$.

$$x = ((-1))^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k+1}{n}\pi \pm i\sin\frac{2k+1}{n}\pi$$

worin für $2k+1$ alle ungraden Zahlen zwischen 0 und n gesetzt werden müssen.

Die dreigliedrigen Factoren von x^n+1 sind hier:

$$x^2 - 2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi + 1$$

und allgemein für $x^n + a$:

$$x^2 - 2x.\sqrt[n]{a}.\cos\frac{2k+1}{n}\pi + (\sqrt[n]{a})^2.$$

Beispiel 1. Für $x^3+1=0$ hat man:

$$x = ((-1))^{\frac{1}{3}} = \cos\frac{2k+1}{3}\pi \pm i\sin\frac{2k+1}{3}\pi.$$

Für $k=0$ ist: $x = \cos\frac{1}{3}\pi \pm i\sin\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.i$
„ $k=1$ „ $x = \cos\pi \pm i\sin\pi = -1$

mithin: $x^3+1 = (x+1)(x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}.i)(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}.i)$
$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$.

Beispiel 2. Für $x^6+1=0$ hat man:

$$x = \cos\frac{2k+1}{6}\pi \pm i\sin\frac{2k+1}{6}\pi$$

Für $k=0$ ist: $x = \cos\frac{\pi}{6} \pm i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \frac{1}{2}i$

„ $k=1$ „ $x = \cos\frac{\pi}{2} \pm i\sin\frac{\pi}{2} = \pm i$

„ $k=2$ „ $x = \cos\frac{5\pi}{6} \pm i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \frac{1}{2}i.$

Es ist also:

$x^6+1 = (x+i)(x-i)(x-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}i)(x-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i)(x+\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}i)(x+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i)$
$x^6+1 = (x^2+1)(x^2-x\sqrt{3}+1)(x^2+x\sqrt{3}+1).$

Zehntes Buch.

Auflösung der cubischen Gleichungen.

135.

Da man nach § 120 aus jeder cubischen Gleichung das Glied, welches die unbekannte Grösse in der zweiten Potenz enthält, fortschaffen kann, so können wir annehmen, dass jede aufzulösende cubische Gleichung entweder die folgende Form schon habe, oder erst darauf gebracht sei, nämlich:

$$x^3 + px + q = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Wir betrachten nun die Wurzel dieser Gleichung als aus zwei Theilen, y und z, bestehend, und setzen $y + z$ statt x, so ist:

$$(y+z)^3 + p(y+z) + q = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + p(y+z) + q = 0$$
$$3yz(y+z) + p(y+z) + y^3 + z^3 + q = 0$$
$$(3yz+p)(y+z) + y^3 + z^3 + q = 0 \ldots\ldots (3)$$

Könnte man nun für y und z solche Werthe finden, welche der Gleichung (3), also auch der Gleichung (2), Genüge leisten so würde offenbar auch ihre Summe, statt x gesetzt der Gleichung (1) genügen. Der Gleichung (3) wird aber offenbar Genüge geleistet, wenn man y und z so bestimmt dass $3yz + p = 0$ und zugleich auch $y^3 + z^3 + q = 0$, woraus:

$$yz = -\tfrac{1}{3}p$$
$$y^3 + z^3 = -q$$

Aus diesen beiden Gleichungen mit zwei Unbekannten findet man nun aber auf elementarem Wege leicht y und z. Die zweite Gleichung quadrirt und davon den vierfachen Cubus der ersten subtrahirt, kommt:

$$y^6 - 2y^3z^3 + z^6 = q^2 + \tfrac{4}{27}p^3$$

$$\text{woraus: } y^3 - z^3 = \sqrt{q^2 + \tfrac{4}{27}p^3}$$

$$\text{hiezu: } \underline{y^3 + z^3 = -q}$$

$$y^3 = -\tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}\sqrt{q^2 + \tfrac{4}{27}p^3}$$

$$z^3 = -\tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{2}\sqrt{q^2 + \tfrac{4}{27}p^3}$$

Es ist mithin, weil $x = y + z$:

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}}.$$

136.

Vorstehende sogenannte Cardanische Formel bedarf aber noch einer umständlichen Erläuterung. Jede cubische Gleichung hat drei Wurzeln und darunter wenigstens eine reelle (§ 113). Die Cardanische Formel giebt aber scheinbar nur eine Wurzel, denn die entgegengesetzten beiden Werthe der Quadratwurzel sind schon berücksichtigt und durch ihre Vorzeichen angedeutet. Da nun aber die Cubikwurzel aus einer Grösse auch drei verschiedene Werthe hat (§ 134 a), so ist, wenn man die beiden Grössen unter dem Zeichen $\sqrt[3]{}$ Kürze halber mit A und B bezeichnet:

$$x = ((1))^{\frac{1}{3}} . \sqrt[3]{A} + ((1))^{\frac{1}{3}} . \sqrt[3]{B}$$

wo nun $\sqrt[3]{A}$, $\sqrt[3]{B}$ die gewöhnlichen arithmetischen, die drei Cubikwurzeln aus der Einheit aber nach § 132:

$$1 \text{ und } \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \text{ und } \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

oder, wenn man, Kürze halber, die zweite mit m, also die dritte mit m^2 bezeichnet, weil $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2$

$$1 \text{ und } m \text{ und } m^2$$

sind, so hat man für jede der beiden in der Cardanischen Formel vorkommenden Cubikwurzeln drei verschiedene Werthe, nämlich:

$$\sqrt[3]{A}, m\sqrt[3]{A}, m^2\sqrt[3]{A}$$
$$\sqrt[3]{B}, m\sqrt[3]{B}, m^2\sqrt[3]{B}.$$

Da nun die Summe von einem Paar aus beiden Reihen eine Wurzel der Gleichung $x^3+px+q=0$ sein muss, es hier aber neun verschiedene Paare giebt (§ 20), so scheint jetzt der Segen zu gross zu werden, indem die Gleichung doch nicht neun, sondern nur drei Wurzeln haben kann. Woran liegt's?

137.

Es liegt daran, dass wir die Wurzeln derselben in zwei Theile, y und z, zerlegten und diese Theile durch die beiden neuen Gleichungen:

$$yz=-\frac{p}{3}$$

$$y^3+z^3=-q$$

bestimmten. Durch diese beiden Bedingungen legen wir aber den beiden Theilen der Wurzel die Eigenschaft bei, dass ihr Product reell $(=-\frac{p}{3})$ und auch die Summe ihrer Cuben reell $(=-q)$ sei. Durch diese eben durch die benutzte Auflösungsmethode durch den ersten Erfinder derselben und ihm selbst wohl unbewusst hinzugefügte und jetzt zu berücksichtigende Bedingung wird die Wahl unter den erwähnten neun Paaren der gefundenen Wurzeln dermassen eingeschränkt, dass wirklich nur drei übrig bleiben. Es ist nämlich, wenn wir die drei Wurzeln der Gleichung mit x', x'', x''' bezeichnen:

$$x' = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$

$$x'' = m\sqrt[3]{A} + m^2\sqrt[3]{B}$$

$$x''' = m^2\sqrt[3]{A} + m\sqrt[3]{B}.$$

Da nun $m = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ und $m^3 = 1$, $m^6 = (m^3)^2 = 1$, so ist klar, dass die aufgestellten drei Paar Werthe für y, z, und **nur** diese drei, die erwähnten Bedingungen erfüllen. Setzt man für m und m^2 ihre Werthe, so kann man die drei Wurzeln auch so schreiben:

$$x' = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$

$$x'' = -\frac{\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}}{2} + \frac{\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}}{2} \cdot \sqrt{-3}$$

$$x''' = -\frac{\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}}{2} - \frac{\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}}{2} \cdot \sqrt{-3}.$$

Anmerkung 1. Ist in der Gleichung $x^3 + px + q = 0$, p positiv, so hat, was auch q sein möge, die Gleichung immer zwei imaginäre Wurzeln (§ 127).

Anmerkung 2. Wäre p negativ und $\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27} = 0$, so wäre $A = B = -\frac{1}{2}q$ und die Gleichung hat dann lauter reelle Wurzeln, worunter zwei gleiche:

$$x' = 2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}\,;\quad x'' = -\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}\,;\quad x''' = -\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}.$$

Beispiel 1. Aus der Gleichung:

$$x^3 + 6x - 7 = 0$$

folgt nach der Formel:

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}}$$

indem hier $p = 6$, $q = -7$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{7}{2} + \sqrt{\tfrac{49}{4} + 8}} + \sqrt[3]{\tfrac{7}{2} - \sqrt{\tfrac{49}{4} + 8}}$$

$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-1}$$

mithin sind die drei Wurzeln (weil hier $A = 8$ und $B = -1$):

$$x' = 2 - 1 = 1$$

$$x'' = \frac{-1 + 3\sqrt{-3}}{2}$$

$$x''' = \frac{-1 - 3\sqrt{-3}}{2}$$

$$x^3 + 6x - 7 = (x - 1)(x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\sqrt{-3})(x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\sqrt{-3}).$$

Beispiel 2. Man hat aus der Gleichung:

$$x^3 - 27x + 54 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{-27}$$

$$x' = -6,\ x'' = 3,\ x''' = 3$$

$$x^3 - 27 + 54 = (x + 6)(x - 3)^2$$

138.

Die Cardanische Formel enthält zwei grosse Unvollkommenheiten.

1. Giebt sie die reelle Wurzel, wenn sie auch rational ist, oftmals unter einer irrationalen Form. So ist z. B. die reelle Wurzel der Gleichung:

$$x^3 - 6x - 40 = 0$$

wie man leicht sieht, $= 4$. Unsere Formel aber giebt:

$$x = \sqrt[3]{(20 + \sqrt{400 - 8})} + \sqrt[3]{(20 - \sqrt{400 - 8})}$$
$$x = 3{,}41421\ldots + 0{,}58578\ldots = 3{,}99999\ldots$$

Man könnte nun freilich durch ein ähnliches Verfahren, durch welches man den Werth von $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ findet (Algebra § 327),

auch $\sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}}$ bestimmen. Dies würde hier aber wieder auf eine cubische Gleichung führen, mithin eher ein logischer Kreis, als eine directe Methode sein.

2. Eine grössere Unvollkommenheit der **Cardanischen** Formel liegt aber noch darin, dass sie, wenn p negativ und zugleich $\frac{p^3}{27} > \frac{1}{4}q^2$, also auch die Grösse $\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}$ negativ ist, die Wurzeln unter einer imaginären Form giebt, obgleich doch in diesem Falle alle drei Wurzeln stets reell sind.*) Dieser Umstand, welcher den Alten, die mit den imaginären Grössen noch nicht umzugehen wussten, viel Kopfbrechens verursacht hat, wurde von ihnen der irreducible Fall genannt. Und in der That, wären seitdem nicht Mittel erfunden, um aus dieser Verwickelung herauszukommen, die **Cardanische** Formel würde in diesem Falle nichts nützen und also auch nicht als eine vollständige Auflösung betrachtet werden können.

139.

Um nun für den Fall, dass p negativ und zugleich $\frac{p^3}{27} > \frac{1}{4}q^2$ ist, die Formel:

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}}$$

---

*) Man denke sich die Gleichung $x^3 - px + q = 0$ construirt, so erhält man für $x = 0$ eine positive Ordinate. Für $x = \sqrt{\frac{p}{3}}$ kommt:

$$\tfrac{p}{3}\sqrt{\tfrac{p}{3}} - p\sqrt{\tfrac{p}{3}} + q = -\tfrac{2}{3}p\sqrt{\tfrac{p}{3}} + q$$

also eine negative Ordinate, denn weil nach Voraussetzung $\frac{4p^3}{27} > q^2$, so ist offenbar auch $\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}} > q$. Für $x = \sqrt{p}$ hat man $p^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}} + q$, mithin wieder eine positive Ordinate. Die Gleichung $x^3 - px + q = 0$ hat also wirklich drei reelle Wurzeln, zwei positive, zwischen 0 und $\sqrt{\frac{p}{3}}$ und zwischen $\sqrt{\frac{p}{3}}$ und $\sqrt{p}$, und eine negative nach § 113. Dasselbe gilt von der Gleichung $x^3 - px - q = 0$, welche nach § 122 die entgegengesetzten Wurzeln von $x^3 - px + q = 0$, also eine positive und zwei negative Wurzeln hat.

zum Spruch zu bringen und zu zeigen, dass alle drei reellen Wurzeln daraus hervorgehen, setzen wir:

$$-\tfrac{1}{2}q = \varrho\cos\varphi \qquad \text{mithin:} \quad \tfrac{1}{4}q^2 = \varrho^2\cos^2\varphi$$

$$\sqrt{\left(\frac{p^3}{27} - \tfrac{1}{4}q^2\right)} = \varrho\sin\varphi \qquad \frac{p^3}{27} - \tfrac{1}{4}q^2 = \varrho^2\sin^2\varphi$$

$$\text{hieraus:} \quad \varrho = \sqrt{\frac{p^3}{27}} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\cos\varphi = \frac{-\tfrac{1}{2}q}{\varrho} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$x = \sqrt[3]{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} + \sqrt[3]{\varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi)}\ ^{*)}$$

$$x = \varrho^{\frac{1}{3}}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{1}{3}} + \varrho^{\frac{1}{3}}(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{1}{3}}$$

$$x = \varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right) + \varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right) \quad (\S\ 88)$$

$$x = 2\varrho^{\frac{1}{3}}.\cos\frac{\varphi}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Man bestimme also erst den Modulus ϱ aus (1), dann φ aus (2), indem man zu dem Winkel, welchen die Tafeln geben, $2k\pi$ hinzufügt, alsdann $k=0, 1, 2$ setzt, so giebt die Formel (3) drei und nur drei verschiedene Werthe für x, nämlich:

$$x' = 2\varrho^{\frac{1}{3}}.\cos\frac{\varphi}{3};\quad x'' = 2\varrho^{\frac{1}{3}}.\cos\frac{2\pi+\varphi}{3};\quad x''' = 2\varrho^{\frac{1}{3}}.\cos\frac{4\pi+\varphi}{3};$$

denn wollte man auch noch $k=3, 4 \ldots\ldots$ setzen, so würden doch die drei verschiedenen Cosinus in den letzteren Ausdrücken in derselben Ordnung wiederkehren. Setzt man z. B. in $\cos\frac{2k\pi+\varphi}{3}$, $k=3$, so ist $\cos\left(2\pi + \frac{\varphi}{3}\right) = \cos\frac{\varphi}{3}$, also dasselbe wie für $k=0$; setzt man $k=4$, so ist $\cos\left(2\pi + \frac{2\pi+\varphi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi+\varphi}{3}$ dasselbe wie für $k=1$ &c.

---

*) Wenn nämlich: $\sqrt{\frac{\varrho^3}{27} - \frac{1}{4}q^2} = \varrho\sin\varphi$, so ist $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{\varrho^3}{27}} = \varrho\sin\varphi.\sqrt{-1}$.

Beispiel. Es ist die Gleichung:

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

gegeben, so ist $p = -7$, $q = +6$ und $\frac{p^3}{27} > \frac{1}{4} q^2$, mithin:

$$\varrho = \sqrt{\frac{7^3}{27}}; \qquad \cos\varphi = -\frac{3}{\varrho}$$

$\log 7^3 = 2{,}5352940$
$\ldots 27 = 1{,}4313638$
$1{,}1039302$
$2)$
$\log \varrho = 0{,}5519651$
$\log \varrho^{\frac{1}{3}} = 0{,}1839884$

$\log 3 = 0{,}4771213\ (n)$
$\ldots \varrho = 0{,}5519651$
$\cos\varphi = 9{,}9251562\ (n)$
$\varphi = 147^0\ 19'\ 11'',4$

$\frac{\varphi}{3} = 49^0 6' 23'',8$	$\frac{2\pi+\varphi}{3} = 169^0 6' 23'',8$	$\frac{4\pi+\varphi}{3} = 289^0 6' 23'',8$
$x' = 2\varrho^{\frac{1}{3}} . \cos\frac{\varphi}{3}$	$x'' = 2\varrho^{\frac{1}{3}} . \cos\frac{2\pi+\varphi}{3}$	$x''' = 2\varrho^{\frac{1}{3}} . \cos\frac{4\pi+\varphi}{3}$
$\log\cos\frac{\varphi}{3} = 9{,}8160116$	$\log\cos\frac{2\pi+\varphi}{3} = 9{,}9921028(n)$	$\log\cos\frac{4\pi+\varphi}{3} = 9{,}5149817$
$\ldots\ldots \varrho^{\frac{1}{3}} = 0{,}1839884$	$\ldots\ldots 2\varrho^{\frac{1}{3}} = 0{,}4850184$	$\ldots\ldots 2\varrho^{\frac{1}{3}} = 0{,}4850184$
$\ldots\ldots 2 = 0{,}3010300$	$0{,}4771212(n)$	$0{,}0000001$
$0{,}3010300$	$x'' = -3$	$x''' = 1$
$x' = 2$		

Elftes Buch.

Zerlegung rational gebrochener Functionen in Brüche, deren Zähler constant und deren Nenner Formen ersten Grades sind.

140.

Nach den Regeln der Buchstabenrechnung lassen sich mehrere gebrochene Functionen leicht auf einerlei Nenner bringen und in eine einzige gebrochene Function vereinigen. So ist z. B.:

$$\frac{5}{x-3}+\frac{2}{x+6}=\frac{5(x+6)+2(x-3)}{(x-3)(x+6)}=\frac{7x+24}{x^2+3x-18} \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{5}{x-2}+\frac{x}{x+6}=\frac{x^2+3x+30}{x^2+4x-12} \ldots\ldots (2)$$

$$\frac{3}{(x-2)^3}+\frac{1}{x+2}=\frac{x^3-6x^2+15x-2}{x^4-4x^3+16x-16} \ldots\ldots (3)$$

$$\frac{2x+1}{x^2-4x+12}+\frac{5}{x+3}=\frac{7x^2-13x+63}{x^3-x^2+36} \ldots\ldots (4)$$

und es ist klar, dass, wenn die einzelnen Brüche echt gebrochene rationale Functionen sind (§ 34), dann auch ihre Vereinigung eine echt gebrochene Function giebt. Man kommt nun leicht auf den Gedanken, auch umgekehrt eine gebrochene Function, deren Nenner nicht eine Form ersten Grades (und auch keine Potenz davon) ist, als aus einfachern Brüchen zusammengesetzt und deshalb in solche zerlegbar zu betrachten, und weil diese Zerlegung besonders für die Integralrechnung von grosser Wichtigkeit ist, eine sichere Methode zu erfinden, nach welcher dieselbe bewirkt werden kann.

141.

Wir können hierbei nun immer annehmen, dass die gebrochene Function, welche in einfachere zerlegt werden soll, eine echt gebrochene ist, denn wäre sie es nicht, wie z. B.: $\frac{x^3+8x^2+4x-66}{x^2+3x-18}$, so könnte man, wie nachstehend angedeutet, durch Division mit dem Nenner in den Zähler (indem man beide nach fallenden Potenzen von x ordnet) die darin enthaltenen Ganzen erst herausziehen. Man erhält dann ausser dieser ganzen noch eine echt gebrochene Function, deren Zähler einfacher ist. Es ist nämlich:

$$\frac{x^3+8x^2+4x-66}{x^2+3x-18}=x+5+\frac{7x+24}{x^2+3x-18}$$

Ebenso: $$\frac{x^2-2x-5}{x^2-4x-6}=1+\frac{2x+1}{x^2-4x-6}.$$

Auch können wir annehmen, dass in der echt gebrochenen Function Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Factor haben, weil man ihn sonst weglassen könnte. So ist z. B.:

$$\frac{2x+4}{(x+5)(x-6)(x+2)}=\frac{2}{(x+5)(x-6)}$$

142.

Um nun eine echt gebrochene Function, z. B. $\frac{7x+24}{x^2+3x-18}$ in einfachere Brüche zu zerlegen, muss offenbar zuerst daran gedacht werden, den Nenner in Factoren aufzulösen, weil dieser ja als das Product aus den Nennern der zu findenden einfachern Brüche betrachtet werden muss. Könnte man den Nenner in lauter einfache und ungleiche Factoren auflösen (was aber von der noch erst zu erfindenden Auflösung aller höhern Gleichungen abhängt), so könnte man offenbar diese einfachen Factoren als die Nenner der zu findenden einfachern Brüche ansehen, deren Zähler dann offenbar constant sein

müssen, weil, wie § 140, Beispiel 2 zeigt, wenn auch nur einer der Zähler die veränderliche Grösse enthielte, die Vereinigung der Brüche die echt gebrochene Function nicht wiedergeben könnte.

Als die natürlichste Methode, diese fraglichen constanten Zähler zu bestimmen, dringt sich hier ganz von selber die zuerst von Leibnitz angewandte Methode der unbestimmten Coefficienten auf, d. h. wir fingiren sie vorläufig. Für die gebrochene Function $\frac{7x+24}{x^2+3x-18}$ z. E. hat man zuerst aus $x^2+3x-18=0$, $x=\frac{-3\pm9}{2}$, $=3$, $=-6$. Es ist mithin:

$$x^2+3x-18=(x-3)(x+6)$$

Setzen wir also:

$$\frac{7x+24}{x^2+3x-18}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+6}$$

und bringen beide Brüche auf einerlei Benennung, so kommt:

$$\frac{7x+24}{x^2+3x-18}=\frac{(A+B)x+(6A-3B)}{x^2+3x-18}$$

Da nun für jeden Werth von x die rechte Seite dieser Gleichung dasselbe geben muss, wie die linke, die Nenner aber gleich sind, so muss auch für jeden Werth von x:

$$7x+24=(A+B)x+(6A-3B)$$

sein. Dies giebt uns zur Bestimmung der fraglichen Zähler A und B nach § 64 die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} A+B=7 \\ 6A-3B=24 \end{array}\right\} \text{woraus: } \begin{array}{l} A=5 \\ B=2 \end{array}$$

Es ist mithin:

$$\frac{7x+24}{x^2+3x-18}=\frac{5}{x-3}+\frac{2}{x+6}$$

Eben so ist:

$$\frac{7x}{x^2+3x-18}=\frac{\frac{7}{3}}{x-3}+\frac{\frac{14}{3}}{x+6}=\frac{7}{3x-9}+\frac{14}{3x+18}$$

Ferner ist:

$$\frac{24}{x^2+3x-18}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+6}=\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+6}\right)$$

143.

Weil man bei dem eben gezeigten Verfahren immer so viele Bedingungsgleichungen ersten Grades erhält, als constante Zähler gesucht werden, so ist klar, dass letztere dadurch vollkommen bestimmt sind, mithin nicht verschiedene Zerlegungen stattfinden können. Bei dieser Methode lassen sich manchmal kleine Rechnungsvortheile benutzen. Man hat z. B.:

$$\frac{7x+24}{(x+6)(x-3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+6}\,\ldots\ldots\ldots(1)$$

Um den Zähler A zu finden, multiplicire man die ganze Gleichung mit $x-3$, so kommt:

$$\frac{7x+24}{x+6}=A+\frac{B(x-3)}{x+6}\,\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Da nun die Gleichung (2) für jeden Werth von x gelten muss, so setze man beiderseits $x=3$, so hat man:

$$\frac{21+24}{3+6}=A=5$$

Um B zu erhalten, multiplicire man die Gleichung (1) mit $x+6$, so kommt:

$$\frac{7x+24}{x-3}=\frac{A(x+6)}{x-3}+B$$

setzt man beiderseits $x=-6$, so hat man:

$$\frac{-42+24}{-6-3}=B=2$$

144.

Aufgabe. Den Bruch: $\frac{4x^2+8x+30}{x^3+2x^2-21x+18}$ zu zerlegen.

Auflösung. Die cubische Gleichung $x^3+2x^2-21x+18=0$ hat die drei reellen Wurzeln 1, 3, -6. Es ist demnach:

$$\frac{4x^2+8x+30}{(x-1)(x-3)(x+6)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+6}\ldots\ldots(1)$$

Multiplicire mit $x-1$ und setze dann $x=1$, so kommt:

$$\frac{4+8+30}{-2\,.\,7}=A=-3.$$

Eben so findet man $B=5$, $C=2$. Es ist mithin:

$$\frac{4x^2+8x+30}{x^3+2x^2-21x+18}=\frac{2}{x+6}+\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-1}.$$

Eben so findet man:

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}=\frac{\frac{1}{2a}}{x-a}+\frac{\frac{1}{2a}}{x+a}$$

$$\frac{2}{a^2-x^2}=\frac{A}{a+x}+\frac{B}{a-x}=\frac{\frac{1}{2a}}{a+x}-\frac{\frac{1}{2a}}{a-x}$$

145.

Enthält der Nenner der gebrochenen Function mehrere oder lauter gleiche Factoren, wie z. B. $\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}$, so kann man einen solchen Bruch offenbar nicht aus $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-2}$ entstanden denken. Einer der drei Nenner wenigstens muss $(x-2)^3$ sein. Da nun aber ausser diesem auch noch einer der Nenner $(x-2)^2$ und $x-2$ oder beide vorhanden sein können, so setze man:

$$\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}=\frac{A}{(x-2)^3}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}$$

Mit dem allgemeinen Nenner multiplicirt, kommt:

$$x^2+3x-4=Cx^2+(B-4C)x+(A-2B+4C)$$

$$\left.\begin{array}{r} C=1 \\ B-4C=3 \\ A-2B+4C=-4 \end{array}\right\} \text{woraus: } \begin{array}{l} C=1 \\ B=7 \\ A=6 \end{array}$$

mithin ist: $\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}=\frac{6}{(x-2)^3}+\frac{7}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-2}$

Anmerkung. In solchem Falle, wie hier, kann man auch folgendermassen verfahren:

Man setze in $\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}$, $x-2=u$, folglich $x=u+2$, so wird:

$$\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}=\frac{(u+2)^2+3(u+2)-4}{u^3}=\frac{u^2+7u+6}{u^3}=\frac{1}{u}+\frac{7}{u^2}+\frac{6}{u^3}$$

und wenn man jetzt statt u wieder $x-2$ setzt:

$$\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}=\frac{1}{x-2}+\frac{7}{(x-2)^2}+\frac{6}{(x-2)^3}$$

146.

Aufgabe. Den Bruch $\frac{x^3-6x^2+15x-2}{(x-2)^3(x+2)}$ zu zerlegen.

Auflösung. Man setze:

$$\frac{x^3-6x^2+15x-2}{(x-2)^3(x+2)}=\frac{A}{(x-2)^3}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}$$

Multiplicirt man mit dem allgemeinen Nenner, so kommt:

$$\begin{array}{r|r|r|r} x^3 - 6x^2 + 15x - 2 = \mathrm{D} & x^3 - 6\mathrm{D} & x^2 + 12\mathrm{D} & x - 8\mathrm{D} \\ \mathrm{C} & -2\mathrm{C} & -\ \ 4\mathrm{C} & +8\mathrm{C} \\ & +\ \mathrm{B} & +\ \ \mathrm{A} & -4\mathrm{B} \\ & & & +2\mathrm{A} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{C} + \mathrm{D} = 1 \\ \mathrm{B} - 2\mathrm{C} - 6\mathrm{D} = \ \ 6 \\ \mathrm{A} - 4\mathrm{C} + 12\mathrm{D} = 15 \\ 2\mathrm{A} - 4\mathrm{B} + 8\mathrm{C} - 8\mathrm{D} = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{hieraus:} \\ \text{(Algebra § 162):} \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathrm{D} = 1 \\ \mathrm{C} = 0 \\ \mathrm{B} = 0 \\ \mathrm{A} = 3 \end{array}$$

mithin ist: $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 15x - 2}{(x-2)^3(x+2)} = \dfrac{3}{(x-2)^3} + \dfrac{1}{x+2}$

147.

Sind mehrere oder alle einfachen Factoren des Nenners der gebrochenen Function imaginär, so könnte man auf dieselbe Weise wie vorhin verfahren und z. B.:

$$\frac{7x^2 - 25x + 62}{(x-3)(x-2+3i)(x-2-3i)} = \frac{\mathrm{A}}{x-3} + \frac{\mathrm{B}}{x-2+3i} + \frac{\mathrm{C}}{x-2-3i}$$

setzen. Man erhält aber für den eigentlichen Zweck dieser Zerlegung (nämlich für die Integralrechnung) leichtere Rechnung, wenn man die imaginären Nenner und Zähler der Theilbrüche vermeidet. Dies kann dadurch geschehen, indem man Theilbrüche mit solchen Nennern vom zweiten Grade fingirt, welche das Product aus zwei gepaarten imaginären Factoren sind. Da man dann aber nicht verlangen kann, dass der Zähler eines solchen Theilbruchs jedesmal constant ist, indem er eine Form ersten Grades sein kann (eine Vorstellung, worauf das Beispiel 4, § 140 führt), so setzen wir für jeden dieser Nenner vom zweiten Grade (so wie auch für Potenzen desselben) eine Form ersten Grades als Zähler an, z. B.:

$$\frac{7x^2 - 25x + 62}{(x-3)(x^2 - 4x + 13)} = \frac{\mathrm{A}}{x-3} + \frac{\mathrm{B}x + \mathrm{C}}{x^2 - 4x + 13}$$

Jetzt mit dem allgemeinen Nenner multiplicirt, kommt:

$$7x^2 - 25x + 62 = (A + B)x^2 - (4A + 3B - C)x + 13A - 3C$$

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 7 \\ 4A + 3B - C &= 25 \\ 13A - 3C &= 62 \end{aligned}\right\} \text{ hieraus: } \begin{aligned} A &= 5 \\ B &= 2 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

mithin ist: $\dfrac{7x^2 - 25x + 62}{(x-3)(x^2 - 4x + 13)} = \dfrac{5}{x-3} + \dfrac{2x+1}{x^2 - 4x + 13}$

148.



Aufgaben. Folgende Brüche zu zerlegen:

$$\frac{4x^2 - x + 6}{(1 + 2x^2)^2}, \qquad \frac{1}{x^2(x^2+1)^2}, \qquad \frac{1}{x^3 - 1}$$

Auflösungen. Man hat:

$$1)\ \frac{4x^2 - x + 6}{(1 + 2x^2)^2} = \frac{Ax + B}{(1 + 2x^2)^2} + \frac{Cx + D}{1 + 2x^2}$$

hieraus: $\dfrac{4x^2 - x + 6}{(1 + 2x^2)^2} = \dfrac{4 - x}{(1 + 2x^2)^2} + \dfrac{2}{1 + 2x^2}$

$$2)\ \frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx + D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1}$$

hieraus: $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x^2+1)^2} - \dfrac{1}{x^2+1}$

$$3)\ \frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} \quad (\S\ 132.)$$

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1}{x - 1} - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}$$

In der Differentialrechnung wird noch eine andere Zerlegungsmethode gezeigt, welche besonders auf Brüche, wie der letztere, anwendbar ist.

Zwölftes Buch.

Von den Kettenbrüchen.

149.

Erklärung. Unter einem Kettenbruch versteht man einen Grössenausdruck in folgender Form:

$$y_0 + \cfrac{1}{y_1 + \cfrac{1}{y_2 + \cfrac{1}{y_3 + \cfrac{1}{y_4 + \cfrac{1}{y_5 + \cfrac{1}{y_6}}}}}}$$

nämlich eine ganze Zahl, y_0 (wo y_0 aber auch 0 sein kann), plus einem Bruche, dessen Zähler 1 und dessen Nenner eine ganze Zahl plus einem Bruche, dessen Zähler wieder 1 ist &c. Die ganzen Zahlen $y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots$ heissen die Glieder des Kettenbruchs. Brounker soll zuerst auf diese Bruchform verfallen sein, indem er, um die Zahl $\frac{\pi}{4}$ zu berechnen, dafür den Ausdruck:

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cdots}}}}$$

aufstellte. Wie er darauf gekommen, ist nicht bekannt. Euler jedoch ist der Erste gewesen, welcher die Kettenbrüche einer näheren Betrachtung unterworfen hat und zwar in der zuerst angegebenen Form (wo nämlich der Zähler immer 1 ist), auf welche jeder andere Kettenbruch immer gebracht werden kann.

Die Kettenbrüche bieten so viele merkwürdige Eigenschaften dar und lassen so mancherlei Anwendungen zu, dass eine vollständige Theorie derselben einen ganzen Band füllen würde.

150.

Es ist leicht, einen gewöhnlichen echten oder unechten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln. Ist der Bruch echt, so dividire man Zähler und Nenner durch den Zähler; den im Nenner entstehenden Bruch eben so behandelt &c., bis der letzte Zähler 1 wird. Ist der Bruch unecht, so stelle man erst die ganze Zahl heraus. Es ist z. B.:

$$\frac{17}{74}=\frac{1}{4+\frac{6}{17}}=\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{5}{6}}}=\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}}$$

$$\frac{74}{17}=4+\frac{6}{17}=4+\frac{1}{2+\frac{5}{6}}=4+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}$$

Umgekehrt würde man ohne weitere Regel aus einem Kettenbruch den erzeugenden Bruch finden können. Es ist z. B.:

$$\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}}=\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{6}{5}}}}=\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{5}{6}}}=\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{17}{6}}}=\frac{1}{4+\frac{6}{17}}=\frac{17}{74}$$

151.

Beide vorhergehenden Rechnungen, um einen Bruch in einen Kettenbruch und umgekehrt zu verwandeln, lassen sich aber bedeutend abkürzen.

Um erstlich gewöhnliche Brüche in Kettenbrüche zu verwandeln, z. B. $\frac{17}{74}, \frac{74}{17}, \frac{972}{1393}$, verfahre man mit jedes Bruches Nenner und Zähler, als wenn man ihren grössten gemeinschaftlichen Factor suchen wollte (Algebra § 29), so sind die Quo-

tienten die Glieder des Kettenbruchs. Die Richtigkeit folgt aus der Rechnung in § 150, z. B.:

$$17 : \overset{0}{\smile} 74 : \overset{4}{\smile} 17 : \overset{2}{\smile} 6 : \overset{1}{\smile} 5 : \overset{5}{\smile} 1$$

mithin ist: $\frac{17}{74} = 0 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}$

$$74 : \overset{4}{\smile} 17 : \overset{2}{\smile} 6 : \overset{1}{\smile} 5 : \overset{5}{\smile} 1$$

mithin: $\frac{74}{17} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}$

$$972 : \overset{0}{\smile} 1393 : \overset{1}{\smile} 972 : \overset{2}{\smile} 421 : \overset{3}{\smile} 130 : \overset{4}{\smile} 31 : \overset{5}{\smile} 6 : \overset{6}{\smile} 1$$

mithin: $\frac{972}{1393} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6}}}}}}$

152.

Um nun auch ein allgemeines Gesetz zu finden, nach welchem man bequemer, als der unmittelbare Gedanke § 150 es angiebt, einen Kettenbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, wollen wir, die allgemeine Bezeichnung beibehaltend, statt vom letzten Gliede nach und nach zum ersten zurückzugehen, umgekehrt verfahren. Es sei also der Kettenbruch allgemein:

$$y_0 + \cfrac{1}{y_1 + \cfrac{1}{y_2 + \cfrac{1}{y_3 + \cfrac{1}{y_4 + \cfrac{1}{y_5 + \cdots}}}}}$$

Nehmen wir nur das 0te Glied, so ist y_0 offenbar kleiner, als der Werth des ganzen Kettenbruchs. Geht man bis zum 1sten Gliede, so ist offenbar $y_0 + \frac{1}{y_1}$ zu gross, weil in dem Bruche $\frac{1}{y_1}$ der Nenner zu klein ist. Geht man bis zum 2ten Gliede, so ist:

$$y_0 + \frac{1}{y_1 + \frac{1}{y_2}}$$

offenbar wieder zu klein &c. Bezeichnet man die hier auf einander folgenden Werthe, welche abwechselnd kleiner und grösser sind, als der wirkliche Werth des ganzen Kettenbruchs und Näherungswerthe desselben genannt werden, mit $\frac{a}{a_1}$, $\frac{b}{b_1}$, $\frac{c}{c_1}$ &c., so hat man:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{y_0}{1}$$

$$\frac{b}{b_1} = y_0 + \frac{1}{y_1} = \frac{y_0 y_1 + 1}{y_1}$$

In dem Bruche $\frac{b}{b_1}$ setze man $y_1 + \frac{1}{y_2}$ statt y_1, so kommt der folgende Bruch, nämlich:

$$\frac{c}{c_1} = \frac{y_0\left(y_1 + \frac{1}{y_2}\right) + 1}{y_1 + \frac{1}{y_2}} = \frac{y_0 y_1 y_2 + y_2 + y_0}{y_1 y_2 + 1}$$

Achtet man hier auf die Verbindung der Glieder des Kettenbruchs, so ergiebt sich ein einfaches Bildungsgesetz, nach welchem man aus den beiden ersten Brüchen $\frac{a}{a_1} = \frac{y_0}{1}$, $\frac{b}{b_1} = \frac{y_0 y_1 + 1}{y_1}$, welche jedoch immer erst unmittelbar gebildet werden müssen, Zähler und Nenner der successiv folgenden Brüche leicht erhalten kann, indem man mit jedem folgenden Gliede sowohl Zähler als Nenner des vorhergehenden Bruchs multiplicirt und zu den Producten Zähler und Nenner des vorvorhergehenden Bruchs addirt. So ist z. B. wirklich:

$$\frac{c}{c_1} = \frac{by_2 + a}{b_1 y_2 + a_1}$$

Setzt man hierin $y_2 + \frac{1}{y_3}$, statt y_2, so ist auch:

$$\frac{d}{d_1} = \frac{b\left(y_2 + \frac{1}{y_3}\right) + a}{b_1\left(y_2 + \frac{1}{y_3}\right) + a_1} = \frac{by_2y_3 + ay_3 + b}{b_1y_2y_3 + a_1y_3 + b_1} = \frac{cy_3 + b}{c_1y_3 + b_1}$$

Hiernach ist klar, dass es einerlei ist, ob man jetzt, um den folgenden Bruch $\frac{e}{e_1}$ zu erhalten, in den vorhergehenden $y_3 + \frac{1}{y_4}$ statt y_3 setzt, oder nach der obigen Regel verfährt, und dass dieses Gesetz durchgehends stattfindet.

Hätte man z. B.:

$$4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}$$

so sind die auf einander folgenden Näherungswerthe (weil hier 4, 2, 1, 5 die Glieder und $\frac{4}{1}$ und $\frac{9}{2}$ die beiden ersten Brüche sind):

$$\left(\tfrac{4}{1}\right),\ \left(\tfrac{9}{2}\right),\ \tfrac{13}{3},\ \tfrac{74}{17}$$

Sind 0, 4, 2, 1, 5 die Glieder, so hat man:

$$\left(\tfrac{0}{1}\right),\ \left(\tfrac{1}{4}\right),\ \tfrac{2}{9},\ \tfrac{3}{13},\ \tfrac{17}{74}$$

Sind 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 die Glieder, so hat man:

$$\left(\tfrac{0}{1}\right),\ \left(\tfrac{1}{1}\right),\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{7}{10},\ \tfrac{30}{43},\ \tfrac{157}{225},\ \tfrac{972}{1393}.$$

153.

Subtrahirt man irgend zwei auf einander folgende Näherungswerthe, so erhält man einen Bruch, dessen Zähler immer ± 1 ist. Diese merkwürdige Eigenschaft lässt sich folgendermassen beweisen.

Seien $\frac{m}{m_1}, \frac{n}{n_1}$ zwei unmittelbar folgende Näherungswerthe

und y das Glied des Kettenbruchs, welches den folgenden Näherungswerth $\frac{p}{p_1}$ bestimmt, so ist:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{ny + m}{n_1 y + m_1}$$

Nimmt man nun die Differenz von den beiden Näherungswerthen $\frac{p}{p_1}$ und $\frac{n}{n_1}$ so wie auch von $\frac{n}{n_1}$ und $\frac{m}{m_1}$, so ist:

$$\frac{ny + m}{n_1 y + m_1} - \frac{n}{n_1} = \frac{mn_1 - m_1 n}{n_1(n_1 y + m_1)}$$

$$\frac{n}{n_1} - \frac{m}{m_1} = -\frac{(mn_1 - m_1 n)}{m_1 n_1}$$

Hieraus ergiebt sich, dass der absolute Werth des Zählers der ersten Differenz, $\frac{p}{p_1} - \frac{n}{n_1}$, ganz derselbe ist, wie bei der zweiten, $\frac{n}{n_1} - \frac{m}{m_1}$, natürlich mit entgegengesetztem Vorzeichen, weil ja die Näherungswerthe abwechselnd zu klein und zu gross sind. Es kommt also nur darauf an, den absoluten Werth eines einzigen dieser gleichen Zähler zu bestimmen. Dazu kann man den Unterschied irgend zweier unmittelbar folgenden, also am einfachsten der beiden ersten Näherungswerthe nehmen, nämlich:

$$\frac{b}{b_1} - \frac{a}{a_1} = \frac{y_0 y_1 + 1}{y_1} - \frac{y_0}{1} = \frac{1}{y_1}$$

Es ist mithin der beständige Zähler in dem Unterschiede zweier unmittelbar folgenden Näherungswerthe $= \pm 1$.

154.

Aus vorstehendem § folgt noch, dass die Unterschiede der Näherungswerthe immer kleiner werden $\frac{b}{b_1} - \frac{a}{a_1} = \frac{1}{a_1 b_1}$; $\frac{c}{c_1} - \frac{b}{b_1} = -\frac{1}{b_1 c_1}$, womit denn auch die Benennung N ä h e r u n g s w e r t h e gerechtfertigt ist, weil der letzte den vollen Werth des Kettenbruchs ausdrückt.

155.

Der wahre Werth eines Kettenbruchs, und wenn er auch bis in's Unendliche fortläuft, liegt immer zwischen zwei beliebigen Näherungswerthen $\frac{m}{m_1}$, $\frac{n}{n_1}$, weil ja der eine zu klein, der andere zu gross ist. Da nun der Unterschied dieser beiden nur $\frac{\pm 1}{m_1 n_1}$, so ist klar, dass, wenn man irgend einen Näherungswerth, z. B. $\frac{m}{m_1}$, statt des ganzen Kettenbruchs setzt, der Fehler gewiss kleiner ist, als ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Quadrat vom Nenner des gesetzten Näherungswerthes ist, also kleiner als $\frac{1}{m_1 m_1}$, weil er ja noch kleiner, als $\frac{1}{m_1 n_1}$ ist. Der Kettenbruch sei z. B.:

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}$$

Also die Näherungswerthe: $(\frac{0}{1})$, $(\frac{1}{4})$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{17}{74}$. Nimmt man den Bruch $\frac{1}{4}$, statt des ganzen Kettenbruchs, so ist der Fehler, den man begeht, kleiner, als $\frac{1}{16}$. Nimmt man den Bruch $\frac{2}{9}$, so ist der Fehler kleiner, als $\frac{1}{81}$ &c.

156.

In allen für einen Kettenbruch erhaltenen Näherungsbrüchen sind Zähler und Nenner immer Primzahlen gegen einander. Seien z. B. $\frac{m}{m_1}$, $\frac{n}{n_1}$ zwei unmittelbar auf einander folgende Näherungsbrüche, so ist:

$$\frac{m}{m_1} - \frac{n}{n_1} = \frac{\pm 1}{m_1 n_1}$$

hieraus: $mn_1 - m_1 n = \pm 1$.

Hier sind nun mn_1, m_1n ganze Zahlen. Hätten also m, m_1 oder n, n_1 einen gemeinschaftlichen Factor, so würde, indem man vorstehende Gleichung dadurch dividirt, linker Hand der Quotient eine ganze Zahl sein, was aber nicht möglich ist, weil er rechter Hand keine ganze Zahl sein kann.

157.

Wir haben im Vorhergehenden die wichtigsten Eigenschaften der Kettenbrüche mitgetheilt. Was nun ihre Anwendung betrifft, so können sie benutzt werden, um aus einer Zahl eine Quadratwurzel bis auf beliebig viele Decimalen zu ziehen, was auf periodische Kettenbrüche führt. Eine andere Anwendung in der sogenannten unbestimmten Analytik und in der höhern Zahlentheorie. Ferner hat man versucht, durch ihre Vermittelung die Wurzeln einer höhern Gleichung zu finden. Die nützlichste Anwendung möchte aber wohl die sein: einen durch sehr viele Ziffern gegebenen Bruch (Verhältniss) näherungsweise und für practische Zwecke genügend durch kleinere Zahlen auszudrücken, indem man ihn in einen Kettenbruch verwandelt und dessen Näherungswerthe sucht.

So ist z. B.: $\pi = \frac{31415926535}{10000000000}$

$$31415927 \underset{3}{:} 10000000 \underset{7}{:} 1415927 \underset{15}{:} 88511 \underset{1}{:} 88262 \text{ \&c.}$$

Es ist also: $\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$

$$\left(\tfrac{3}{1}\right), \left(\tfrac{22}{7}\right), \tfrac{333}{106}, \tfrac{355}{113}, \ldots$$

Dreizehntes Buch.

Interpolation.

158.

Zufolge § 47 geht aus einer ganzen Function vom $n$ten Range:

$$y = Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Mx + N$$

allemal eine arithmetische Reihe vom $n$ten Range hervor, wenn man statt der veränderlichen Grösse x successive äquidifferente Werthe x_0, x_1, $x_2 \ldots$ setzt, so dass also:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots$$

oder, wenn man die ganz beliebige beständige Differenz mit h bezeichnet (so dass $h = x_1 - x_0 = \ldots$), statt x nach und nach x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h \ldots$ setzt.

Hieraus folgt aber, dass, weil h beliebig ist, und statt $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h \ldots$ auch $x_0, x_0 + \frac{1}{n}h, x_0 + \frac{2}{n}h + \ldots, x_0 + \frac{n}{n}h,$

$x_0 + \frac{n+1}{n}h \ldots$ gesetzt werden darf, man zwischen je zwei Glieder einer arithmetischen Reihe sehr leicht eine gleiche Anzahl neuer Glieder einschalten (interpoliren) kann, welche demselben Gesetze, wie die übrigen, unterworfen sind, mithin alle zusammen eine arithmetische Reihe von demselben Range bilden (vergl. § 48). Dies ist es nun, was man unter Interpolation zu verstehen hat. Da solche Interpolationen bei Entwerfung von Tabellen, welche eine Reihe von durch Zahlen ausgedrückten Beobachtungen oder berechneten Resultaten darstellen, und die

oft eine arithmetische Reihe bilden, zuweilen nothwendig werden, um die Tabellen zu vervollständigen, so wollen wir die Theorie der Interpolation durch ein paar Beispiele erläutern.

159.

Aufgabe. Es sind so viele Glieder einer arithmetischen Reihe durch Rechnung oder durch Beobachtung gefunden, dass der Rang dadurch bestimmt ist, z. B.:

	0	1	2	3	4
	1,	17,	97,	289,	641
$\triangle^1$	16,	80,	192,	352	
$\triangle^2$	64,	112,	160		
$\triangle^3$	48,	48			
$\triangle^4$	0				

Es sollen zwischen je zwei Glieder n z. B. drei Glieder interpolirt werden.

Auflösung. Da hier vorausgesetzt ist, dass die vorliegenden fünf Zahlen: 1, 17, 97, 289, 641, eine wirkliche arithmetische Reihe bilden, so kann man, nachdem durch Bildung der Differenzreihen ihr Rang bestimmt worden, erst nach der allgemeinen Formel (§ 48):

$$y = y_0 + x . \triangle^1 + \frac{x.(x-1)}{1 . 2} . \triangle^2 + \frac{x.(x-1).(x-2)}{1 . 2 . 3} . \triangle^3 + \ldots$$

ihr allgemeines Glied suchen. Dieses ist, da hier $y_0 = 1$, $\triangle^1 = 16$, $\triangle^2 = 64$, $\triangle^3 = 48$:

$$y = 8x^3 + 8x^2 + 1.$$

Setzt man hierin $x = 0, 1, 2, 3 \ldots$, so kommt die gegebene Reihe wieder, nämlich:

1, 17, 97, 289, 641.

Um nun zwischen je zwei Glieder drei Glieder zu interpoliren, braucht man in demselben allgemeinen Gliede statt der stetigen Zunahme von x, nämlich $h = 1$, nur $h = \frac{1}{4}$ zu neh-

men (§ 45) und also $x = 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4} \ldots$ zu setzen, so kommt die gegebene Reihe mit drei interpolirten Gliedern, nämlich:

$$1,\ 1\tfrac{5}{8},\ 4,\ 8\tfrac{7}{8},\ 17,\ 29\tfrac{1}{8}, \ldots$$

160.

Setzt man in der Formel für das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe:

$$y = y_0 + x.\triangle + \frac{x.x-1}{1\ .\ 2}\triangle^2 + \frac{x.x-1.x-2}{1\ .\ 2\ .\ 3}\triangle^3 + \ldots$$

$x = 0, \frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1} \ldots$, so erhält man dieselbe Reihe mit n interpolirten Gliedern. Setzt man, um keine Brüche substituiren zu brauchen, $\frac{x}{n+1}$ statt x, so erhält man die gewöhnliche allgemeine Interpolationsformel:

$$y = y_0 + \frac{x}{n+1}\triangle^1 + \frac{x.(x-n-1)}{(n+1)^2} . \frac{\triangle^2}{1.2} + \frac{x.(x-n-1)(x-2n-2)}{(n+1)^3} . \frac{\triangle^3}{1.2.3} + \ldots$$

worin nun für x die ganzen Zahlen $0, 1, 2, 3 \ldots$ zu setzen sind.

161.

Ist die zu interpolirende Reihe vom dritten oder gar noch höhern Range, so wird die Arbeit sehr mühsam.*) In der Regel ist aber die zu interpolirende Reihe nur vom zweiten Range (öfters noch vom ersten), also $\triangle^3 = 0$, und dann kann man das Interpoliren durch ganz einfaches Addiren bewirken. Dies ergiebt sich aus folgender Betrachtung:

So wie man durch Subtraction aus der Hauptreihe die Differenzreihen bildet, so muss sich offenbar auch wieder rückwärts durch Addition aus den Differenzreihen oder vielmehr nur aus den Anfangsgliedern sämmtlicher Reihen die Hauptreihe bilden lassen. Man hat z. B.

---

*) Für diese Fälle hat Gauss expeditivere Interpolations-Methoden angegeben. S. Berliner astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1830.

4,	9,	16,	25,	36...
	5,	7,	9,	11...
		2,	2,	2...

Wäre nun das Anfangsglied einer Reihe = 4 gegeben und die Anfangsglieder 5 und 2 ihrer beiden Differenzreihen (also die zu findende Reihe vom zweiten Range), so hat man:

2,	2,	2,	2,	2,	2,	2...
5,	7,	9,	11,	13,	15,	17...
4,	9,	16,	25,	36,	49,	64...

162.

Man berechne also, wenn n Glieder interpolirt werden sollen, nach der Interpolationsformel:

$$y = y_0 + \frac{x}{n+1} . \triangle^1 + \frac{x.(x-n-1)}{(n+1)^2} . \frac{\triangle^2}{1.2} + \ldots$$

direct nur so viele Glieder, dass man die Anfangsglieder der Differenzreihen bilden kann, also drei Glieder, wenn die Reihe vom zweiten, und nur zwei Glieder, wenn sie vom ersten Range (eine arithmetische Progression) ist, und verfahre dann wie im vorhergehenden Beispiel, wobei man, wie es die Umstände oder die Bequemlichkeit des Rechners verlangen, die Reihen unter oder auch neben einander ordnen kann. Sollen z. B. in der Reihe:

4, 36, 100, 196

welche, wenigstens in der hier gegebenen Ausdehnung (vier Glieder), als eine arithmetische sich ergiebt, drei Glieder interpolirt werden, so ist hier $n = 3$, $y_0 = 4$, $\triangle^1 = 32$, $\triangle^2 = 32$, $\triangle^3 y = 0$, und man hat:

$$y = 4 + \frac{x}{4} . 32 + \frac{x.(x-4)}{4 . 4} . \frac{32}{1.2}$$

oder: $y = 4 + 4x + x^2$

für $x = 0, 1, 2 \ldots$ kommt die Reihe:

4, 9, 16...
5, 7 ...
2 ...

Mithin sind 4, 5, 2 die Anfangsglieder der gesuchten und ihrer Differenzreihen; daher:

2,	2,	2,	2,	2,	2,	2,	2,	2,	2	...
5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19,	21,	23	...
4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100,	121	...

163.

Angenommen, es sei die Tabelle der Briggs'schen Logarithmen bis zu $\log x_0 = \log 6000 = 3{,}7781513$ berechnet und es solle diese Tabelle für die nun folgenden Zahlen 6001, 6002... bis 6040 fortgesetzt werden.

Statt nun die Logarithmen unmittelbar für die jedesmal um eine Einheit wachsenden Zahlen zu berechnen, was nach § 77 geschehen könnte, ist es bequemer, sie zuerst nur innerhalb schicklicher Intervalle, h, z. B. von 10 zu 10, zu berechnen und dann die Lücken durch Interpolation auszufüllen.

Weil nämlich, wenn man den Modulus der Briggs'schen Logarithmen $0{,}43429448\ldots = M$ setzt und beachtet, dass:

$$l(x_0 + h) = l\left[x_0\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)\right] = lx_0 + l\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)$$

und also der Briggs'sche Logarithmus, nämlich:

$$\log(x_0 + h) = Mlx_0 + M.\frac{h}{x_0} - \frac{M}{2}.\frac{h^2}{x_0^2} + \frac{M}{3}.\frac{h^3}{x_0^3} - + \ldots$$

so sieht man, dass, weil $x_0 = 6000$, für kleine Werthe von $h = 10, 20, 30\ldots$ die unendliche Reihe sehr convergent wird, und dass bis zu einer gewissen Grenze, z. B. bis $h = 40$, das dritte Glied $\frac{M}{3}.\frac{h^3}{x_0^3} = \frac{M}{3}.\frac{40^3}{6000^3}$ schon vernachlässigt werden kann, wenn man die Logarithmen nur bis auf sieben Decimalen genau haben will. Man kann also in diesem Falle die zwar transcen-

dente Reihe dennoch als eine arithmetische betrachten, und zwar vom zweiten Range, so lange das dritte, und vom dritten Range, so lange das vierte Glied keinen Einfluss hat.

Da nun $\log x_0 = Mlx_0$ schon bekannt ($\log 6000 = 3,7781513$), so hat man aus der Gleichung:

$$\log(x_0 + h) = Mlx_0 + M\frac{h}{x_0} - \frac{M}{2}\cdot\frac{h^2}{x_0^2}$$

indem man $h = 0,\ 10,\ 20\ldots$ setzt:

y_0	$\triangle^1$	$\triangle^2$	$\triangle^3$
log 6000 = 3,7781513			
... 6010 = 3,7788745	7232		
... 6020 = 3,7795965	7220	— 12	
... 6030 = 3,7803173	7208	— 12	0
... 6040 = 3,7810369	7196	— 12	0

Sollen nun 9 Glieder interpolirt werden, so giebt die Interpolationsformel:

$$y = y_0 + \frac{x}{n+1}\cdot\triangle^1 + \frac{x(x-n-1)}{(n+1)^2}\cdot\frac{\triangle^2}{1.2}$$

indem hier $n = 9$; $\triangle^1 = 7232$; $\triangle^2 = -12$; $\triangle^3 = 0$ und $y_0 = 3,7781513$:

$$y = 3,7781513 + 723,8x - 0,06x^2$$

y	$\triangle^1$	$\triangle^2$
3,7781513	723,74	— 0,12
2236,74	723,62	
2960,36	723,50	
3683,86	723,38	
4407,24	723,26	
5130,50	723,14	
5853,64	723,02	
6576,66	722,90	
7299,56	722,78	
8022,34	722,66	
8745,00	722,54	
9467,54	722,42	
3,7790189,96	722,32	
0912,28		

Setzt man hierin $x = 0,\ 1,\ 2\ldots$ so kommt die Reihe in der ersten Columne, die man aber, nachdem nur die drei ersten Glieder und die erste und zweite Differenz berechnet sind, leichter durch Addition bilden kann.

Die kleine constante Differenz $-0,12$ kann man leicht im Kopfe behalten und deshalb sehr schnell die erste Differenzreihe und daraus die gesuchte Hauptreihe bilden. Offenbar wird auch ein

geübter Rechner nicht so viele Ziffern schreiben, als hier der Deutlichkeit halber geschehen.

164.

Auf diese Weise sind nun sehr viele Tabellen (logarithmische, trigonometrische, astronomische, physikalische &c.) berechnet. Nur wenige Zahlen werden direct berechnet oder durch Beobachtung und Experimente bestimmt und dann die übrigen, also die meisten, durch Interpolation gefunden. Das Interpoliren wird innerhalb kleiner Intervalle selbst dann noch oftmals angewandt, wenn die Differenzen $\triangle^1$, $\triangle^2$, $\triangle^3$... auch nicht strenge auf 0 auslaufen, jedoch immer kleiner und beinahe gleich werden. Alsdann wird von den letzten beinahe gleichen Differenzen das arithmetische Mittel als constant genommen. Je kleiner dann die stets abnehmenden Differenzen $\triangle^1$, $\triangle^2$... sind, desto mehr convergirt die Interpolationsreihe.

165.

Ist die Function zwischen zwei veränderlichen Grössen, x, y, nicht bekannt und sind die für x gesetzten Werthe x_0, x_1, x_2... zu welchen die durch Beobachtung gefundene Reihe y_0, y_1, y_2... gehört, nicht äquidifferent, so kann man auch nicht auf die vorhin gezeigte Weise die zu andern Werthen von x gehörigen Werthe von y finden oder interpoliren. Um jedoch auch in diesem Fall ein Band, $y = f(x)$, zu finden, welches diese Beobachtungen y_0, y_1... in sich begreift, und dazwischen fallende Werthe berechnen zu können, wollen wir vorläufig annehmen, dass $f(x)$ eine g a n z e Function sei (§ 34). Der grössern Anschaulichkeit halber wollen wir die für x gesetzten Werthe x_0, x_1... durch Abscissen und die zugehörige Reihe y_0, y_1... durch Ordinaten versinnlichen, und nach der parabolischen Linie (§ 34) fragen, welche durch die bestimmten Puncte M_0 (x_0, y_0), M_1 (x_1, y_1)... geht und annehmen, dass nur vier Puncte gegeben seien.

Offenbar giebt es hier unzählig viele parabolische Linien,

welche durch eine bestimmte Anzahl Puncte gehen und dennoch sowohl zwischen diesen Puncten, als auch in ihrem fernern Laufe sehr von einander abweichen, und die Frage ist also insofern unbestimmt. Weiss man aber aus irgend einem Grunde, dass die Ordinaten der gesuchten stetigen Linie, welche zwischen die gegebenen Ordinaten fallen, stetig wachsen oder abnehmen, so kann man, wenn n Puncte gegeben sind, die Gleichung der Linie in der Hypothese, dass sie eine ganze Function sein soll, als vom $n-1$ten Grade annehmen, mithin, da hier zur vorläufigen Erläuterung vier Puncte gegeben sind, die ganze Function vom dritten Grade folgendermassen fingiren:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Hier müssen nun die vier unbekannten Coefficienten a, b, c, d so bestimmt werden, dass für $x = x_0$, x_1, x_2, x_3 die Function oder $y = y_0$, y_1, y_2, y_3 wird. Dies giebt uns folgende vier Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
y_0 &= a + bx_0 + cx_0^2 + dx_0^3 \\
y_1 &= a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3 \\
y_2 &= a + bx_2 + cx_2^2 + dx_2^3 \\
y_3 &= a + bx_3 + cx_3^2 + dx_3^3
\end{aligned}$$

aus welchen die vier Coefficienten, aber auch nicht mehrere, durch gewöhnliche Elimination bestimmt werden können.

166.

Macht man sich aber daran, diesen Eliminationsprocess wirklich auszuführen, so zeigt sich bald, dass, wenn man allgemeine Formeln erhalten und also statt der Grössen x_0, $x_1 \ldots$, y_0, $y_1 \ldots$ nicht nur für einen speciellen Fall geltende Zahlen setzen will, die Elimination schon sehr mühsam wird, wenn nur vier Puncte gegeben sind, und dass sie für jede andere Anzahl Puncte von Neuem wiederholt werden müsste. Eine Arbeit, die nicht wohl ausführbar ist. Durch folgende Betrachtung kommt

man aber leichter zum Ziel.*) Bei dem wirklichen Versuche, die Elimination nach der gewöhnlichen Methode auszuführen, macht man (was auch vorauszusehen), die Beobachtung, dass, weil die Bedingungsgleichungen in Bezug auf die Grössen y_0, y_1, y_2, y_3 linear sind, d. h. diese Grössen nur in der ersten Potenz enthalten, dieselben auch in den allgemeinen Formeln für die zu findenden Coefficienten a, b, c, d nur linear (nur in der ersten Potenz und nicht mit einander multiplicirt) vorkommen können, und dass es in den Formeln für a, b, c, d kein Glied geben wird, welches nicht eine dieser Grössen y_0, y_1, y_2, y_3 als Factor enthielte. Man ist deshalb berechtigt, anzunehmen, dass:

$$y = F(x) . y_0 + f(x) . y_1 + \varphi(x) . y_2 + \psi(x) . y_3$$

wo $F(x)$, $f(x)$ &c. ganze Functionen von x sind. Diese Functionen müssen für vorliegendes Beispiel vom dritten Grade und so beschaffen sein, dass

für $x = x_0$

$$F(x) = 1, f(x) = 0, \ \varphi(x) = 0, \ \psi(x) = 0$$

für $x = x_1$ dagegen

$$F(x) = 0, f(x) = 1, \ \varphi(x) = 0, \ \psi(x) = 0$$

für $x = x_2$

$$F(x) = 0, f(x) = 0, \ \varphi(x) = 1, \ \psi(x) = 0$$

für $x = x_3$

$$F(x) = 0, f(x) = 0, \ \varphi(x) = 0, \ \psi(x) = 1$$

weil sonst nicht für $x = x_0$, x_1, x_2, x_3; $y = y_0$, y_2, y_3 kommen kann.

Soll aber $F(x) = 0$ werden für $x = x_1$, x_2, x_3, so lehrt die Algebra, dass $F(x)$ die drei Factoren $x - x_1$, $x - x_2$, $x - x_3$ enthalten muss (§ 104) In dem, was $F(x)$ sonst noch enthält, darf kein x mehr vorkommen, weil x sonst gegen die Voraus-

*) Von hier an folgen wir fast wörtlich der Abhandlung im Berliner astronomischen Jahrbuch für 1830.

setzung die dritte Potenz überschreiten würde. Bezeichnen wir also mit C den Inbegriff der übrigen constanten Factoren in F (x), so ist:

$$F(x) = C(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Nach der ersten Bedingung muss aber für $x = x_0$, $F(x) = 1$ sein, daher:

$$1 = C(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)$$

$$\text{mithin: } C = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$\text{folglich: } F(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

Dieselben Schlüsse auf $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ angewendet, geben den allgemeinen Ausdruck:

$$y = \begin{cases} \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \cdot y_0 \\ \dfrac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \cdot y_1 \\ \dfrac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \cdot y_2 \\ \dfrac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \cdot y_3 \end{cases}$$

Diese äusserst regelmässige Interpolationsformel eignet sich für den Gebrauch der Logarithmen und lässt sich offenbar leicht auf beliebig viele Puncte ausdehnen. Sie findet sich auch unter dem Namen Lagrange's Interpolationsformel in Lacroix's Calcul différent. et intégral, jedoch ohne Begründung.

Anhang.

Summation einiger Reihen.

167.

Bezeichnet man die Summe der Reihe:

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha+2\varphi) + \ldots + \cos(\alpha+n\varphi)$$

d. h. den dafür zu setzenden und gleichwerthigen geschlossenen Ausdruck vorläufig mit s und multiplicirt auf beiden Seiten mit $2\cos\varphi$, so ist:

$$2s.\cos\varphi = 2\cos\alpha\cos\varphi + 2\cos(\alpha+\varphi).\cos\varphi + 2\cos(\alpha+2\varphi)\cos\varphi + \ldots + 2\cos(\alpha+n\varphi)\cos\varphi$$

Zufolge Trigonometrie § 100, 32 ist:

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha-\varphi) = 2\cos\alpha.\cos\varphi\\
&\cos(\alpha+2\varphi) + \cos\alpha = 2\cos(\alpha+\varphi).\cos\varphi\\
&\cos(\alpha+3\varphi) + \cos(\alpha+\varphi) = 2\cos(\alpha+2\varphi).\cos\varphi\\
&\cos(\alpha+4\varphi) + \cos(\alpha+2\varphi) = 2\cos(\alpha+3\varphi).\cos\varphi\\
&\qquad\vdots\\
&\cos(\alpha+(n+1)\varphi) + \cos(\alpha+(n-1)\varphi = 2\cos(\alpha+n\varphi).\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Dies substituirt, kommt:

$$2s.\cos\varphi = \begin{cases}\cos(\alpha+\varphi)+\cos(\alpha+2\varphi)+\cos(\alpha+3\varphi)+\ldots+\cos(\alpha+(n+1)\varphi)\\ \cos(\alpha-\varphi)+\cos\alpha+\cos(\alpha+\varphi)+\ldots+\cos(\alpha+(n-1)\varphi)\end{cases}$$

$$2s.\cos\varphi = s - \cos\alpha + \cos(\alpha+(n+1)\varphi) + \cos(\alpha-\varphi) + s - \cos(\alpha+n\varphi)$$

$$2s.(1-\cos\varphi) = \cos(\alpha+n\varphi) - \cos(\alpha+(n+1)\varphi) - [\cos(\alpha-\varphi) - \cos\alpha]$$

$$2s.2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi = 2\sin(\alpha+(n+\tfrac{1}{2})\varphi).\sin\tfrac{1}{2}\varphi - 2\sin(\alpha-\tfrac{1}{2}\varphi).\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$2s.\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sin(\alpha+(n+\tfrac{1}{2})\varphi) - \sin(\alpha-\tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$2s.\sin\tfrac{1}{2}\varphi = 2\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}n\varphi).\sin\frac{n+1}{2}\varphi$$

$$s = \frac{\cos(\alpha + \frac{1}{2}n\varphi) . \sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

Es ist mithin:

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha+2\varphi) + \ldots + \cos(\alpha+n\varphi) = \frac{\cos(\alpha+\frac{1}{2}n\varphi) . \sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

und wenn man $\alpha = 0$ setzt, so ist:

$$1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \frac{\cos\frac{1}{2}n\varphi . \sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

168.

Multiplicirt man die Gleichung:

$$s = \sin\alpha + \sin(\alpha+\varphi) + \sin(\alpha+2\varphi) + \ldots + \sin(\alpha+n\varphi)$$

beiderseits mit $2\cos\varphi$, so ist:

$$2s . \cos\varphi = 2\sin\alpha . \cos\varphi + 2 . \sin(\alpha+\varphi) . \cos\varphi + \ldots + 2\sin(\alpha+n\varphi) . \cos\varphi \ldots (1)$$

Nun aber ist:

$$\sin(\alpha+\varphi) + \sin(\alpha-\varphi) = 2\sin\alpha . \cos\varphi$$
$$\sin(\alpha+2\varphi) + \sin\alpha = 2\sin(\alpha+\varphi) . \cos\varphi$$
$$\sin(\alpha+3\varphi) + \sin(\alpha+\varphi) = 2\sin(\alpha+2\varphi) . \cos\varphi$$
$$\sin(\alpha+4\varphi) + \sin(\alpha+2\varphi) = 2\sin(\alpha+3\varphi) . \cos\varphi$$
$$\vdots$$
$$\sin(\alpha+(n+1)\varphi) + \sin(\alpha+(n-1)\varphi) = 2\sin(\alpha+n\varphi) . \cos\varphi.$$

Dies in Gleichung (1) substituirt, kommt:

$$2s . \cos\varphi = \begin{cases} \sin(\alpha+\varphi) + \sin(\alpha+2\varphi) + \ldots + \sin(\alpha+(n+1)\varphi) \\ \sin(\alpha-\varphi) + \sin\alpha + \sin(\alpha+\varphi) + \ldots + \sin(\alpha+(n-1)\varphi) \end{cases}$$

$$2s . \cos\varphi = s - \sin\alpha + \sin(\alpha(n+1)\varphi) + \sin(\alpha-\varphi) + s - \sin(\alpha+n\varphi)$$

$$2s . (1-\cos\varphi) = \sin\alpha - \sin(\alpha-\varphi) - \{\sin(\alpha+(n+1)\varphi) - \sin(\alpha+n\varphi)\}$$

$$2s . (1-\cos\varphi) = 2\cos(\alpha-\tfrac{1}{2}\varphi) . \sin\tfrac{1}{2}\varphi - 2\cos(\alpha+(n+\tfrac{1}{2})\varphi)\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$2s . \sin\tfrac{1}{2}\varphi = \cos(\alpha-\tfrac{1}{2}\varphi) - \cos(\alpha+(n+\tfrac{1}{2})\varphi)$$

$$2s . \sin\tfrac{1}{2}\varphi = 2\sin(\alpha+\tfrac{1}{2}n\varphi) . \sin\frac{n+1}{2}\varphi$$

Es ist mithin:

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+\varphi) + \sin(\alpha+2\varphi) + \sin(\alpha+3\varphi) + \ldots + \sin(\alpha+n\varphi) = \frac{\sin(\alpha+\frac{1}{2}n\varphi) . \sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

und wenn man $\alpha = 0$ setzt:

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin n\varphi = \frac{\sin\frac{1}{2}n\varphi . \sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

169.

Um die Summe der Reihe:

$$\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{3\varphi}{2}+\sin\frac{5\varphi}{2}+\ldots+\sin\frac{2n-1}{2}\varphi$$

zu finden, beachte man, dass (Trigonometrie § 100):

$$1-\cos\varphi=2\sin\tfrac{1}{2}\varphi.\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\cos\varphi-\cos 2\varphi=2\sin\frac{3\varphi}{2}.\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\cos 2\varphi-\cos 3\varphi=2\sin\frac{5\varphi}{2}.\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\vdots$$

$$\cos(n-1)\varphi-\cos n\varphi=2\sin\frac{2n-1}{2}\varphi.\sin\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Addirt man dies System von Gleichungen, so kommt:

$$1-\cos n\varphi=2\sin\tfrac{1}{2}\varphi\left(\sin\tfrac{1}{2}\varphi+\sin\frac{3\varphi}{2}+\sin\frac{5\varphi}{2}+\ldots+\sin\frac{2n-1}{2}\varphi\right)$$

Es ist mithin $\left(\text{weil } 1-\cos n\varphi=2\sin^2\frac{n\varphi}{2}\right)$:

$$\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{3\varphi}{2}+\sin\frac{5\varphi}{2}+\ldots+\sin\frac{2n-1}{2}\varphi=\frac{\sin^2\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

170.

Allgemeine Regeln, gesetzmässige unendliche convergente Reihen zu summiren, kann die Analysis allein nicht geben. Fast in jedem besondern Falle müssen, wenn die Summation überhaupt möglich ist, besondere Kunstgriffe benutzt werden. Oftmals geschieht es dadurch, dass man die unendliche Reihe mit irgend einem schicklich gewählten Factor multiplicirt (wie eben schon bei ein paar endlichen Reihen gezeigt), oft auch dadurch, dass man die Coefficienten der Potenzen der veränderlichen Grösse in einzelne Brüche zerlegt und zusieht, ob die dadurch entstandenen neuen Reihen anderweitig schon bekannt und summirbar sind. Ist dies der Fall, so ist damit zugleich die Convergenz der Reihe bewiesen. Nehmen wir z. B. die Reihe:

$$\frac{x}{1.2} - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} - \frac{x^4}{4.5} + - \ldots \pm \frac{x^n}{n.(n+1)}$$

so kann man, weil (§ 142): $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, mithin:

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n.(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

obige Reihe auch so schreiben:

$$x\left(1 - \frac{1}{2}\right) - x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + x^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - x^4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + - \ldots$$

Diese Reihe zerlegt sich nun aber in folgende zwei:

$$\begin{cases} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \quad - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + - \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Die erste Reihe ist bekannt, $= l(1+x)$, die zweite Reihe lässt sich, indem man 1 addirt und subtrahirt, so schreiben:

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + - \ldots - 1$$

oder auch so:

$$\frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots}{x} - 1$$

Dies ist aber gleich $\frac{l(1+x)}{x} - 1$. Daher die fragliche Reihe

$$\frac{x}{1.2} - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} - \frac{x^4}{4.5} + - + - \ldots = l(1+x) + \frac{l(1+x)}{x} - 1$$

$$= \frac{(x+1)}{x} . l(1+x) - 1$$

Setzt man $x = l$, so ist:

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + - \ldots = 2\,l2 - 1 = l4 - 1$$

171.

Aufgabe. Man suche die Summe folgender Reihe:

$$\frac{x}{1.3} - \frac{x^2}{3.5} + \frac{x^3}{5.7} - \frac{x^4}{7.9} + - \ldots\ldots\ldots \pm \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Auflösung. Die Coefficienten lassen sich folgenderweise zerlegen (§ 142):

$$\frac{1}{1.3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{3.5} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{1}{5.7} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)$$

$$\vdots$$

Obige Reihe, deren Summe wir $= s$ setzen, zerlegt sich also in folgende zwei:

$$s = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{5} - \frac{x^4}{7} + - \ldots\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{7} - \frac{x^4}{9} + - \ldots\right) \end{cases}$$

oder, indem wir $x = u^2$ setzen, in:

$$2s = \begin{cases} u\left(u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \ldots\right) \ldots\ldots\ldots (1) \\ -\frac{u^2}{3} + \frac{u^4}{5} - \frac{u^6}{7} + - + \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Die erste Reihe ist offenbar $= u \operatorname{Arctg} u$ (§ 87, (1)).

Die zweite Reihe lässt sich so schreiben:

$$1 - \frac{u^2}{3} + \frac{u^4}{5} - \frac{u^6}{7} + \ldots - 1$$

oder auch so: $$\frac{u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \ldots}{u} - 1$$

mithin ist:

$$2s = u \operatorname{Arctg} u + \frac{\operatorname{Arctg} u}{u} - 1 = \frac{(u^2+1)}{u} \operatorname{Arctg} u - 1.$$

Mithin ist, weil $u = \sqrt{x}$:

$$\frac{x}{1.3} - \frac{x^2}{3.5} + \frac{x^3}{5.7} - \frac{x^4}{7.9} + - \ldots = \frac{x+1}{2\sqrt{x}} \operatorname{Arctg} \sqrt{x} - \tfrac{1}{2}$$

Setzt man $x = 1$:

$$\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} + - \ldots = \frac{\pi - 2}{4}$$

172.

Aufgabe. Man suche die Summe folgender Reihe:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Auflösung. Es ist:

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n.(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man:

$$\Sigma \left[\frac{1}{n.(n+1)}\right] = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

und für $n = \infty$ (weil dann $\frac{1}{n}$ oder $\frac{1}{n+1} = 0$) ist:

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots \text{ in infinitum.}$$

173.

Aufgabe. Die Summe s folgender Reihe zu finden:

$$s = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \ldots$$

Auflösung. Multiplicire beiderseits mit $x-1$, so kommt:

$$(x-1)s = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots - 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \ldots$$

$$\therefore \quad (x-1)s + 1 = \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \ldots$$

Setzt man jetzt $x = 1$, so ist:

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots \text{in inf.}$$

174.

Umgekehrt lassen sich aber nach einer sehr leichten Regel unzählige gesetzmässige Reihen bestimmen, welche alle summirbar sind. Schreibt man nämlich eine beliebige Reihe von Zahlen hin und bildet dann die sogenannte Summenreihe, indem man die Summen von ein, zwei, drei &c. Gliedern sucht, so muss offenbar, wenn man in der gebildeten Summenreihe das erste Glied vom zweiten subtrahirt, das zweite Glied der summirten Reihe, und wenn man das zweite vom dritten subtrahirt, das dritte und allgemein das $n$te Glied der summirten Reihe kommen, wenn man das $(n-1)$te Glied der Summenreihe vom $n$ten Gliede derselben subtrahirt. Aus dieser Vorstellung folgt nun aber, dass, wenn man eine nach positiver Seite, also für die Zahlen 1, 2, 3... continuirliche Function von x, z. B. $\frac{x}{x+1}$, als das summatorische Glied einer unbekannten Reihe, als bekannt annimmt, man das allgemeine (x)te Glied der unbekannten Reihe (also auch die Reihe selbst) findet, wenn man das $(x-1)$te Glied vom $x$ten Gliede subtrahirt. Soll z. B. $\frac{1}{x+1}$ das summatorische Glied sein, so ist das allgemeine (x)te Glied der entsprechenden Reihe:

$$=\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x}=\frac{1}{x(x+1)}$$

folglich ist (vergl. § 51):

$$\frac{x}{x+1}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{x(x+1)}$$

Soll x^2 das summatorische Glied sein, so ist das allgemeine (x)te Glied der entsprechenden Reihe $=x^2-(x-1)^2=2x-1$. Daher:

$$x^2=1+3+5+7\ldots+(2x-1).$$

175.

Lehrsatz. Wenn die Reihe: $a+bx+cx^2+dx^3+\ldots$ summirbar ist, so sind zu gleicher Zeit auch folgende beiden Reihen summirbar:

$$a+bx.\sin\alpha+cx^2\sin 2\alpha+dx^3.\sin 3\alpha+\ldots$$
$$a+bx.\cos\alpha+cx^2\cos 2\alpha+dx^3.\cos 3\alpha+\ldots$$

Beweis. Man setze die Summe der ersten Reihe $=y$, die der zweiten $=z$, multiplicire die erste mit $i=\sqrt{-1}$ und addire sie zur zweiten, so hat man:

$$z+yi=a(1+i)+bx(\cos\alpha+i\sin\alpha)+cx^2(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha)+\ldots$$

oder auch (§ 88):

$$z+yi=a(1+i)+bx(\cos\alpha+i\sin\alpha)+cx^2(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2+\ldots$$

oder, wenn man $x(\cos\alpha+i\sin\alpha)=u$ setzt:

$$z+yi=ai+a+bu+cu^2+du^3+eu^4+\ldots$$

Die Summe der Reihe $a+bx+cx^2+\ldots$, welche nach Voraussetzung summirbar ist, wird irgend eine Function von x sein; bezeichnen wir sie mit $F(x)$, so ist auch:

$$z+yi=ai+F(u).$$

Die Function $F(u)$ besteht aus reellen und imaginären Theilen, lässt sich aber (§ 88) in zwei Theile zerlegen, wovon der eine reell, der andere imaginär ist, so dass wir $F(u)=p+qi$ setzen können. Mithin ist:

$$z+yi=p+qi+ai=p+(q+a)i.$$

Sind aber zwei complexe Grössen einander gleich, so müssen offenbar die reellen und imaginären Theile besonders einander gleich sein (§ 85), daher:

$$z = p$$
$$y = q + a$$

Setzt man z. B. $a = b = c = \ldots = 1$, so hat man die Reihe $1 + x + x^2 + x^3 \ldots$ deren Summe (§ 62) $= \frac{1}{1-x}$, also $F(x) = \frac{1}{1-x}$, mithin auch $F(u) = \frac{1}{1-u}$. In diesem besondern Fall ist also:

$$z + yi = i + \frac{1}{1-u}$$

oder für u seinen Werth gesetzt:

$$z + yi = i + \frac{1}{1 - x\cos\alpha - ix\sin\alpha}$$

Zähler und Nenner mit $1 - x\cos\alpha + ix\sin\alpha$ multiplicirt:

$$z + yi = i + \frac{1 - x\cos\alpha + ix\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$$

$$z + yi = \frac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} + \left(1 + \frac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}\right)i$$

Man hat also:

$$z = 1 + x\cos\alpha + x^2\cos 2\alpha + x^3\cos 3\alpha + \ldots = \frac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$$

$$y = 1 + x\sin\alpha + x^2\sin 2\alpha + x^3\sin 3\alpha + \ldots = 1 + \frac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$$

Theorie der imaginären Grössen.

176.

Die sehr subtile Theorie der imaginären Grössen wurde zuerst von Gauss streng wissenschaftlich begründet. Die uns

bereits 1830 mündlich mitgetheilten tiefsinnigen Ansichten darüber sind seitdem in einer Vorlesung der Societät der Wissenschaften in Göttingen überreicht. Der Bericht darüber findet sich in den Göttinger gelehrten Anzeigen 1831, 64. Stück. Da aber diese Anzeigen wohl nur Wenige sich verschaffen können, so wollen wir aus dem fraglichen Bericht hier Folgendes mittheilen:

„So wie die absoluten ganzen Zahlen durch eine in einer graden Linie unter gleichen Entfernungen geordnete Reihe von Puncten dargestellt werden, in der der Anfangspunct die Zahl 0, der nächste die Zahl 1 u. s. w. vertritt; und so wie dann zur Darstellung der negativen Zahlen nur eine unbegrenzte Verlängerung dieser Reihe auf der entgegengesetzten Seite des Anfangspuncts erforderlich ist: so bedarf es zur Darstellung der complexen ganzen Zahlen nur des Zusatzes, dass jene Reihe als in einer unbegrenzten Ebene befindlich angesehen und parallel mit ihr auf beiden Seiten eine unbeschränkte Anzahl ähnlicher Reihen in gleichen Abständen von einander angenommen werde, so dass wir, anstatt einer Reihe von Puncten, ein System von Puncten vor uns haben, die sich auf eine zwiefache Art in Reihen von Reihen ordnen lassen, und zur Bildung einer Eintheilung der ganzen Ebene in lauter gleiche Quadrate dienen. Der nächste Punct bei 0 in der ersten Nebenreihe auf der einen Seite der Reihe, welche die reellen Zahlen repräsentirt, bezieht sich dann auf die Zahl i, so wie der nächste Punct bei 0 in der nächsten Nebenreihe auf der andern Seite auf $-i$ u. s. f. Bei dieser Darstellung wird die Ausführung der arithmetischen Operationen in Beziehung auf die complexen Grössen einer Versinnlichung fähig, die nichts zu wünschen übrig lässt.

Von der andern Seite wird hierdurch die wahre Metaphysik der imaginären Grössen in ein neues helles Licht gestellt.

Unsere allgemeine Arithmetik, von deren Umfang die Geometrie der Alten so weit überflügelt wird, ist ganz die Schöpfung der neueren Zeit. Ursprünglich ausgehend von dem Begriff der absoluten ganzen Zahlen, hat sie ihr Gebiet stufenweise erweitert; zu den ganzen Zahlen sind die gebrochenen, zu den rationalen die irrationalen, zu den positiven die negativen, zu den reellen die imaginären hinzugekommen. Dies

Vorschreiten ist aber immer anfangs mit furchtsam zögerndem Schritt geschehen. Die ersten Algebraisten nannten noch die negativen Wurzeln der Gleichungen falsche Wurzeln, und sie sind es auch, wo die Aufgabe, auf welche sie sich beziehen, so eingekleidet vorgetragen ist, dass die Beschaffenheit der gesuchten Grösse kein Entgegengesetztes zulässt. Allein so wenig man in der allgemeinen Arithmetik Bedenken hat, die gebrochenen Zahlen mit aufzunehmen, obgleich es so viele zählbare Dinge giebt, wobei eine Bruchzahl ohne Sinn ist, eben so wenig durften in jener den negativen Zahlen gleiche Rechte mit den positiven deshalb versagt werden, weil unzählige Dinge kein Entgegengesetztes zulassen: die Realität der negativen Zahlen ist hinreichend gerechtfertigt, da sie in unzähligen anderen Fällen ein adäquates Substrat finden. Darüber ist man nun freilich seit langer Zeit im Klaren. Allein die den reellen Grössen gegenübergestellten imaginären — ehemals und hin und wieder noch jetzt, obwohl unschicklich, unmögliche genannt — sind noch immer weniger eingebürgert als nur geduldet, und erscheinen also mehr wie ein an sich inhaltleeres Zeichenspiel, dem man ein denkbares Substrat unbedingt abspricht, ohne doch den reichen Tribut, welchen dieses Zeichenspiel zuletzt in den Schatz der Verhältnisse der reellen Grössen steuert, verschmähen zu wollen.

Der Verf. (Gauss) hat diesen hochwichtigen Theil der Mathematik seit vielen Jahren aus einem verschiedenen Gesichtspuncte betrachtet, wobei den imaginären Grössen eben so gut ein Gegenstand untergelegt werden kann, wie den negativen: es hat aber bisher an einer Veranlassung gefehlt, dieses öffentlich bestimmt auszusprechen, wenn gleich aufmerksame Leser die Spuren davon in der 1799 erschienenen Schrift über die Gleichungen und in der Preisschrift über die Umbildung der Flächen leicht wiederfinden werden. In der gegenwärtigen Abhandlung sind die Grundzüge davon kurz angegeben, sie bestehen in Folgendem:

Positive und negative Zahlen können nur da eine Anwendung finden, wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleich zu stellen ist,

Genau besehen, findet diese Voraussetzung nur da statt, wo nicht Substanzen (für sich denkbare Gegenstände), sondern Relationen zwischen je zwei Gegenständen das Gezählte sind. Postulirt wird dabei, dass diese Gegenstände auf eine bestimmte Art in eine Reihe geordnet sind, z. B. A, B, C, D..., und dass die Relation des A zu B als der Relation des B zu C u. s. w. gleich betrachtet werden kann. Hier gehört nun zu dem Begriff der Entgegensetzung nichts weiter, als der Umtausch der Glieder der Relation, so dass, wenn die Relation (oder der Uebergang) von A zu B als + 1 gilt, die Relation von B zu A durch —1 dargestellt werden muss. Insofern also eine solche Reihe auf beiden Seiten unbegrenzt ist, repräsentirt jede reelle ganze Zahl die Relation eines beliebig als Anfang gewählten Gliedes zu einem bestimmten Gliede der Reihe.

Sind aber die Gegenstände von solcher Art, dass sie nicht in Eine, wenn gleich unbegrenzte Reihe geordnet werden können, sondern sich nur in Reihen von Reihen ordnen lassen, oder, was dasselbe ist, bilden sie eine Mannichfaltigkeit von zwei Dimensionen; verhält es sich dann mit den Relationen einer Reihe zu einer andern oder den Uebergängen aus einer in die andere auf eine ähnliche Weise, wie vorhin mit den Uebergängen von einem Gliede einer Reihe zu einem andern Gliede derselben Reihe, so bedarf es offenbar zur Abmessung des Uebergangs von einem Gliede des Systems zu einem andern, ausser den vorigen Einheiten + 1 und — 1, noch zweier anderer unter sich auch entgegengesetzten $+i$ und $-i$. Offenbar muss aber dabei noch postulirt werden, dass die Einheit i allemal den Uebergang von einem gegebenen Gliede einer Reihe zu einem bestimmten Gliede der unmittelbar angrenzenden Reihe bezeichne. Auf diese Weise wird also das System auf eine doppelte Art in Reihen von Reihen geordnet werden können.

Der Mathematiker abstrahirt gänzlich von der Beschaffenheit der Gegenstände und dem Inhalt ihrer Relationen; er hat es bloss mit der Abzählung und Vergleichung der Relationen unter sich zu thun: insofern ist er eben so, wie er den durch + 1 und — 1 bezeichneten Relationen, an sich betrachtet, Gleich-

artigkeit beilegt, solche auf alle vier Elemente $+1$, -1, $+i$ und $-i$ zu erstrecken befugt.

Zur Anschauung lassen sich diese Verhältnisse nur durch eine Darstellung im Raume bringen, und der einfachste Fall ist, wo kein Grund vorhanden ist, die Symbole der Gegenstände anders als quadratisch anzuordnen, indem man nämlich eine unbegrenzte Ebene durch zwei Systeme von Parallellinien, die einander rechtwinklig durchkreuzen, in Quadrate vertheilt und die Durchschnittspuncte zu den Symbolen wählt. Jeder solcher Punct A hat hier vier Nachbarn, und wenn man die Relation des A zu einem benachbarten Puncte durch $+1$ bezeichnet, so ist die durch -1 zu bezeichnende von selbst bestimmt, während man, welche der beiden andern man will, für $+i$ wählen, oder den sich auf $+i$ beziehenden Punct nach Gefallen rechts oder links nehmen kann. Dieser Unterschied zwischen rechts und links ist, sobald man vorwärts und rückwärts in der Ebene, und oben und unten in Beziehung auf die beiden Seiten der Ebene einmal (nach Gefallen) festgesetzt hat, in sich völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes Andern nur durch Nachweisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen nachweisen können.*) Wenn man aber auch über letzteres sich entschlossen hat, sieht man, dass es doch von unserer Willkür abhing, welche von den beiden sich in Einem Puncte durchkreuzenden Reihen wir als Hauptreihe, und welche Richtung in ihr man als auf positive Zahlen sich beziehend ansehen wollte; man sieht ferner, dass, wenn wir die vorher als $+i$ behandelte Relation für $+1$ nehmen wollen, man nothwendig die vorher durch -1 bezeichnete Relation für $+i$ nehmen muss. Das heisst aber in der Sprache der Mathematiker: $+i$ ist mittlere Proportionalgrösse zwischen $+1$ und -1 oder entspricht dem Zeichen $\sqrt{-1}$; wir sagen absichtlich

*) Beide Bemerkungen, sagt Gauss, hat schon Kant gemacht, aber man begreift nicht, wie dieser scharfsinnige Philosoph in der ersteren einen Beweis für seine Meinung, dass der Raum nur Form unserer äussern Anschauung sei, zu finden glauben konnte, da die zweite so klar das Gegentheil, und dass der Raum unabhängig von unserer Anschauungsart eine reelle Bedeutung haben muss, beweiset.



nicht die mittlere Proportionalgrösse, denn $-i$ hat offenbar gleichen Anspruch. Hier ist also die Nachweisbarkeit einer anschaulichen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ vollkommen gerechtfertigt, und mehr bedarf es nicht, um diese Grösse in das Gebiet der Gegenstände der Arithmetik zuzulassen.

Wir haben geglaubt, den Freunden der Mathematik durch diese kurze Darstellung der Hauptmomente einer neuen Theorie der sogenannten imaginären Grössen einen Dienst zu erweisen. Hat man diesen Gegenstand bisher aus einem falschen Gesichtspuncte betrachtet und eine geheimnissvolle Dunkelheit dabei gefunden, so ist dies grösstentheils den wenig schicklichen Benennungen zuzuschreiben. Hätte man $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ nicht positive, negative, imaginäre (oder gar unmögliche) Einheit, sondern etwa directe, inverse, laterale Einheit genannt, so hätte von einer solchen Dunkelheit kaum die Rede sein können. Der Verfasser hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannichfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können, ihre Beantwortung finden wird."

Construction der imaginären Grössen.

177.

Ueber die geometrische Construction der imaginären Grössen hat Herr Drobisch der Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig eine Abhandlung überreicht, welche zugleich eine kurze Geschichte der imaginären Grössen und Nachweis der hierüber erschienenen Schriften enthält. Sie ist abgedruckt in den Berichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. 2ter Band, 1848. Da auch diese Berichte nur auf öffentlichen

Staatsbibliotheken sich befinden, so wollen wir hier Folgendes daraus mittheilen:

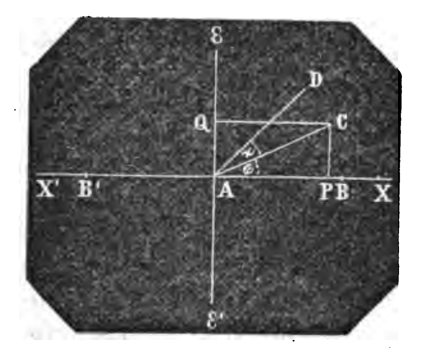
„Meine Nachweisung der geometrischen Bedeutung der imaginären Grössen, sagt Herr Drobisch, ist folgende:

„Wenn auf einer nach beiden Seiten unbegrenzten Geraden x^1x ein fester Punct, A, gegeben ist, und von diesem aus nach entgegengesetzten Richtungen auf x^1x zwei gleiche Abschnitte $AB = AB^1$ aufgetragen werden, so bezeichnet man die Lage des Puncts B^1 gegen A in Vergleichung mit der Lage des Puncts B gegen A durch $-AB$, und umgekehrt die Lage von B gegen A in Vergleichung mit der Lage von B^1 gegen A durch $-AB^1$. Man erhält also die Bestimmung der Lage eines jeden der beiden Puncte B, B^1 aus der Bestimmung der Lage des andern durch Vorsetzung des Minuszeichens, oder, wie es auch aufgefasst werden kann, des Coefficienten (-1), so dass $AB^1 = (-1) AB$ und $AB = (-1) AB^1$ ist, wenn resp. AB, AB^1 die Bestimmungen der Lage von B, B^1 gegen A bedeuten. Der Coefficient (-1) drückt hier also die wechselseitige Beziehung aus, welche zwischen den Lagen der beiden, in gleichen Entfernungen von A nach entgegengesetzten Richtungen bestimmten Puncte B, B^1 gegen A stattfindet.*)

Wenn nun in der Ebene, in welcher x^1x liegt, ausserhalb dieser Linie ein dritter Punct, C, in der Entfernung $AC = AB = AB^1$ von A gegeben ist, und AC mit AB den Winkel φ bildet, so fragt es sich, ob auch dann noch ein Coefficient von AB aufgefunden werden kann, der die Lage von C gegen A in Vergleichung mit der Lage von B gegen A ausdrückt.

---

*) Man kann von hier an auch folgenden kürzern Weg einschlagen: Sei λ der unbekannte Factor, mit welchem man die Linie AB multipliciren muss, damit sie sich um 90° dreht (in die Lage AE kommt), so muss man nochmals mit λ multipliciren, damit sie sich wiederum um 90° dreht (in die grade entgegengesetzte Lage $AB^1 = (-1) . AB$ kommt), so dass nämlich: $\lambda^2 . AB = -AB$, woraus: $\lambda = \sqrt{-1}$. Ist nun $AB = +1$, so ist $AE = +\sqrt{-1}$, $AB^1 = \lambda^2 = -1$, $AE^1 = \lambda^3 = -\sqrt{-1}$, $AB = \lambda^4 = 1$. Die Ausführung der Multiplication mit lateralen Grössen wird hiedurch einer Versinnlichung fähig. So ist z. B.: $2i . 3i = 6 . i^2 = -6$ &c.



Da die Verschiedenheit zwischen der Lage von C gegen A und von B gegen A nur auf der Verschiedenheit der Richtungen der beiden Geraden AB, AC beruht, und diese durch den Winkel φ bestimmt wird, so muss der gesuchte Coefficient eine Function von φ sein. Er sei daher $=f(\varphi)$, so dass also:

$$AC = AB.f(\varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Aendere jetzt AC seine Lage, indem φ in $\varphi + \psi$ und AC in AD übergehen mag, so wird auf dieselbe Weise die Lage von D gegen A in Vergleichung mit der Lage von B gegen A bestimmt durch:

$$AD = AB.f(\varphi + \psi) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Es lässt sich aber nach demselben Princip auch die Lage von D gegen A in Vergleichung mit der von C gegen A bestimmen, und wird, da AD mit AC den Winkel ψ bildet, alsdann sein:

$$AD = AC.f(\psi) \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Substituirt man hier für AC seinen Ausdruck in (1), so folgt:

$$AD = AB.f(\varphi).f(\psi)$$

und wenn dies mit dem Ausdruck von AD in (2) gleich gesetzt wird:

$$f(\varphi + \psi) = f(\varphi).f(\psi) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Dieser Bedingungsgleichung für die Form der Function f entspricht aber bekanntlich allein:

$$f(\varphi) = a^{\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)^{*)}$$

*) Weil $a^{\varphi}.a^{\psi} = a^{\varphi+\psi}$.

wo a eine noch unbestimmte Grösse ist. Demnach ist, vermöge (1):

$$AC = AB . a^{\varphi} \dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

Hieraus wird nun für $\varphi = \pi$:

$$AC = AB . a^{\pi}.$$

Für diesen Abweichungswinkel geht aber AC in AB^1 über' und ist daher $AC = AB^1 = -AB$; woraus sofort folgt:

$$a^{\pi} = -1 \,;\; a = (-1)^{\frac{1}{\pi}} \dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

Demnach ist, vermöge (6):

$$AC = AB . (-1)^{\frac{\varphi}{\pi}} \dots\dots\dots\dots\dots (8)$$

und $(-1)^{\frac{\varphi}{\pi}}$ der gesuchte Coefficient.

Wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$, wo AC in die auf $x^1 x$ in A senkrechte Gerade AE übergeht, so wird nach (8):

$$AE = AB . (-1)^{\frac{1}{2}} = AB . \sqrt{-1} \dots\dots\dots\dots (9)$$

Ebenso wird für $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ oder $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, wo AC in die der AE entgegengesetzten Linie AE^1 übergeht:

$$AE^1 = AB (-1)^{\frac{3}{2}} = -AB . \sqrt{-1} \dots\dots\dots (10)$$

Hieraus erhellt, dass $\pm\sqrt{-1}$ als der Coefficient anzusehen ist, durch welchen die senkrechte Lage der damit behafteten Geraden gegen die Lage, welche ihr zukommt, wenn sie den Coefficienten $+1$ hat, bezeichnet wird. Es ist nun aber auch:

$$(-1)^{\frac{\varphi}{\pi}} = \cos\varphi + i \sin\varphi \text{*)}$$

*) Es ist $\cos\pi \pm i \sin\pi = -1$. Mithin:

$$(-1)^{\frac{\varphi}{\pi}} = (\cos\pi \pm i \sin\pi)^{\frac{\varphi}{\pi}} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi.$$

daher nach (8):

$$AC = AB(\cos\varphi + i \sin\varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

wofür auch gesetzt werden kann:

$$AC = AB . e^{i\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Es kann also auch $e^{i\varphi}$ als der gesuchte Coefficient betrachtet werden. Schreibt man für (11):

$$AC = AB . \cos\varphi + iAB . \sin\varphi$$

so bedeutet in dem Ausdrucke zur Rechten des Gleichheitszeichens AB cos φ ohne Zweifel eine nach derselben Richtung wie AB von A aus auf AX aufzutragende Linie, da cos φ nur zur Bestimmung ihres Grössenverhältnisses gegen AB dient. Dagegen i. AB sin φ nach (9) eine Linie von der Länge AB sin φ, welche in A senkrecht auf AX zu errichten ist. Fällt man also von C auf AB und AE die resp. Senkrechten CP, CQ, so ist mit Bezug auf die Lage:

$$AP = AB . \cos\varphi; \quad AQ = AB \sin\varphi . \sqrt{-1}.$$

Sollen nun nach (11) diese Linien addirt werden, so kann dies nichts Anderes bedeuten, als: es soll die zweite Linie AQ, ohne ihre Grösse und Richtung zu ändern, so an die erste AP angesetzt werden, dass ihr Anfangspunct mit dem Endpunct der letztern zusammenfällt. Dies geschieht, wenn AQ sich selbst parallel fortrückt, bis sie in die Lage PC kommt" &c.

Druck der Hofbuchdruckerei (H. A. Pierer) in Altenburg.

Von demselben Verfasser ist früher erschienen:

Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.
Zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens bearbeitet. 12. Aufl. 235 Seiten. 1870. 1 1/3 Thlr.

Ausführliches Lehrbuch der analytischen oder höhern Geometrie.
Zum Selbstunterricht. Enthaltend: einleitende Betrachtungen über das Wesen, den Zweck und practischen Nutzen der höhern Geometrie, Theorie der Linien, so wie der Flächen ersten und zweiten Grades &c. Mit 121 Figuren im Text. 8. Auflage. 214 Seiten. 1869. 1 1/3 Thlr.

Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie.
Ebene und körperliche Geometrie; zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens. Mit 181 Figuren im Text. 14. Auflage. 177 Seiten. 1870. 1 Thlr.

Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie.
Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens. Mit 58 Figuren im Text. 8. Aufl. 105 Seiten. 1870. 24 Sgr.

Einleitung in die Infinitesimalrechnung.
Erster Theil: **Differentialrechnung.** Zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf das Nothwendigste und Wichtigste. Zweiter Theil: **Integralrechnung.** Zum Selbstunterricht. Mit Rücksicht auf das Nothwendigste und Wichtigste. 4. Auflage. 1869. 2 2/3 Thlr.

Einleitung in die Mechanik.
Zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens. 3. Auflage. 1869. 2 Thlr. 8 Sgr.

